UN ANÁLISIS DEL TRATAMIENTO DE LA SEMEJANZA EN LOS DOCUMENTOS OFICIALES Y TEXTOS ESCOLARES DE MATEMÁTICAS EN LA SEGUNDA MITAD DEL SIGLO XX

Escudero Pérez, Isabel
Departamento de Didáctica de las Matemáticas
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Sevilla
escudero@us.es

Resumen. Este trabajo centra su atención en el tratamiento de la semejanza y el teorema de Thales en los documentos curriculares oficiales y en los libros de texto de matemáticas correspondientes a las edades de 11-16 años durante los últimos cincuenta años. La distinción de tres momentos en la evolución histórica de la semejanza ha permitido identificar tres aproximaciones al concepto cuando se considera como objeto de enseñanza. Estas aproximaciones y la forma de establecer las relaciones entre semejanza y teorema de Thales son los elementos que utilizamos en el análisis. En el estudio se pone de manifiesto la cantidad de restricciones que pesan en la enseñanza de dichos conceptos y su desplazamiento a voluntad de los cambios de planes.

Palabras clave. Didáctica de las matemáticas, semejanza y teorema de Thales, nivel de secundaria, documentos curriculares oficiales, libros de texto.

An analysis of how the similarity of official documents and school texts was treated in the second half of the 20th century

Summary. This work focuses on the development of similarity and Thales Theorem in the curriculum documents and mathematics textbooks belonging to 11-16 year olds level, during the last fifty years. The differentiation of the three moments in the historic development of similarity allows to identify three approaches to the concept when it is considered a teaching object. These different approaches and the way of establishing the relation between similarity and Thales Theorem are the aspects that I use in the analysis. The results show the great amount of restrictions that have influenced the teaching of the concepts and the different role that they play in the distinct periods considered.

Keywords. Didactic of mathematics, similarity and Thales Theorem, secondary level, curriculum documents, school textbooks.

INTRODUCCIÓN

El tratamiento dado en los documentos oficiales y en los textos escolares a la semejanza y al teorema de Thales en las últimas décadas es el centro de atención de este trabajo. Estos conceptos, que comparten aspectos numéricos y geométricos, están presentes en numerosas situaciones del mundo real, tales como fotografías, proyecciones de imágenes o máquinas fotocopiadoras, proyección de sombras a distintas horas del día, etc. Tienen, además, un peso histórico que les ha hecho estar presentes durante siglos en los programas de distintos niveles educativos, aunque el abandono sufrido por la geometría sintética en las matemáticas escolares durante la influencia de las matemáticas modernas ha afectado su tratamiento durante bastantes años. Todo ello, junto con la necesidad de replantearse de una forma reflexiva los contenidos del currículo escolar, ha influido en nuestro interés por estos tópicos.

Para analizar los posibles cambios habidos en la enseñanza de una determinada noción matemática, durante un periodo de tiempo que abarca distintos planes educativos, resulta imprescindible considerar tanto los documentos oficiales como la forma en que los equipos educativos de distintas editoriales han recogido las orientaciones y los cuestionarios que aparecen en dichos documentos. La importancia del análisis del libro de texto como reflejo de la actividad que se realiza en el aula ha sido destacada por González y Sierra (2003) dentro del campo de investigación histórica en didáctica de las matemáticas. De las dos líneas de actuación que, según García y Llinares (1996), se han desarrollado con relación al análisis de libros de texto, nuestro trabajo podemos enmarcarlo en aquellos estudios centrados en el análisis de la forma en que los contenidos vienen reflejados en el libro de texto y, en particular, en elegir un tópico concreto y examinar la forma en que se contempla en diferentes textos escolares de los niveles considerados.

DISTINTAS FORMAS DE APROXIMARSE A LA SEMEJANZA

La definición actual de *semejanza*, que puede figurar en cualquier tratado de geometría o de matemáticas generales para universitarios (Coxeter, 1971; Berger, 1990) es un objeto muy elaborado como consecuencia de las numerosas generalizaciones realizadas a lo largo de los siglos. La semejanza como objeto matemático es una transformación geométrica (en el plano o en el espacio), cumpliendo una serie de propiedades, tal y como se expresa en las siguientes definiciones:

«Semejanza: Transformación de un espacio euclidiano por la cual para cualesquiera dos puntos A y B y sus respectivas imágenes A' y B' tiene lugar la relación |A'B'| = k |AB|, donde k es un número positivo llamado razón de semejanza» (Vinográdov, Tomo 9-2, p. 53).

«La Semejanza es el producto de una homotecia por un movimiento, S=H·M» (Martínez et al., 1984, p. 364), considerando definidas previamente las transformaciones de homotecia y de movimiento.

En las definiciones anteriores, se aprecian las dos propiedades características de la semejanza en el plano, por lo que pueden definirse figuras semejantes como aquéllas que tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales. Dado que aquí nos vamos a centrar en la semejanza como objeto de enseñanza en los primeros niveles, estas definiciones y propiedades van a ser referentes claves.

En este trabajo, para el estudio de la evolución histórica de semejanza y homotecia, seguimos el trabajo de Lemonidis (1990, 1991). Este autor ha realizado un estudio histórico de estos conceptos, el cual relaciona con la situación correspondiente en la enseñanza, que le ha permitido identificar una progresión en dicha evolución y determinados obstáculos epistemológicos con ella relacionados. En particular, Lemonidis (1990) distingue tres grandes periodos:

a) El griego. La primera demostración del teorema de Thales y algunos teoremas relativos a figuras semejantes se encuentra en los *Elementos*, de Euclides (s. IV a.C.). Hay que destacar de este periodo y, en general, en el periodo de la influencia de la geometría de Euclides, que las transformaciones no existen como tales.

b) Del siglo XVI al XVIII. Los problemas de la representación del espacio que surgen en el Renacimiento van a ser el germen para el estudio de las transformaciones. Durante estos siglos, se van a ir desarrollando lentamente, sin que se pueda identificar aún una etapa de utilización consciente y de conceptualización de las mismas. De este periodo, se resalta la consideración de una transformación como un útil en la resolución de problemas.

c) Siglos XIX y XX. Periodo de la estructuración y algebrización de la geometría. En el siglo XIX se produce la consideración de la homotecia y de la semejanza como objetos matemáticos, debido en gran parte al desarrollo que experimenta la geometría, entre las fechas de publicación de la geometría descriptiva de Monge (año 1799) y el Programa Erlangen de Felix Klein (año 1872) y a la evolución del campo numérico.

A partir de aquí, Lemonidis (1991) identifica tres momentos distintos en el concepto de *semejanza*, desde los que, a su vez, se pueden determinar tres aproximaciones a ella que creemos que deben tenerse presentes cuando se la considera como objeto de enseñanza:

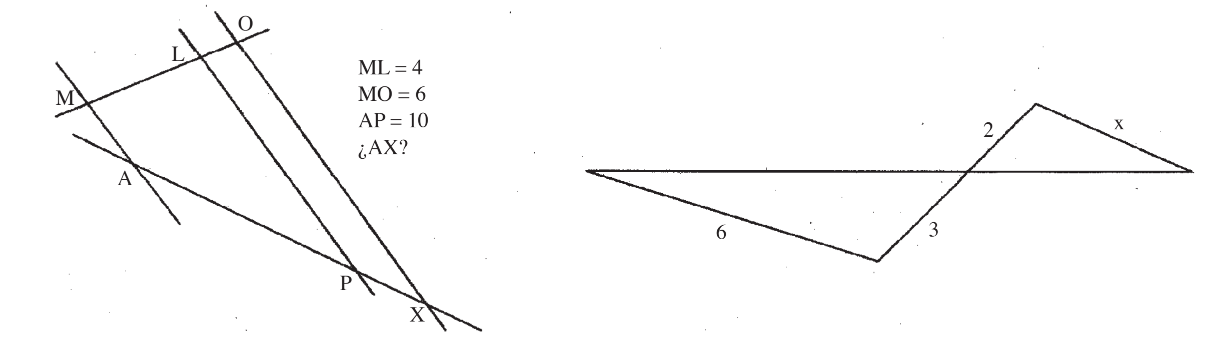
a) ***Relación intrafigural.*** Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra.

b) ***Transformación geométrica vista como útil***. La transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en él mismo. Se utiliza la semejanza como un útil en la resolución de problemas gráficos.

c) ***Transformación geométrica como objeto matemático.*** Caracterizada porque hay un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

Ahora bien, dado que la semejanza como objeto de enseñanza guarda una estrecha relación con la presentación que se suele hacer del teorema de Thales en los textos escolares, también nos ha parecido importante incluir algunas aportaciones de determinados estudios sobre el tipo de representaciones en el teorema de Thales y la semejanza (Cordier y Cordier, 1991; Duperret, 1996; Lemonidis, 1991; Pfaff, 1997-98). Por todo ello, en la aproximación al concepto dentro de la ***relación intrafigural*** distinguimos: *a*) cuando las figuras forman parte de configuraciones de Thales, en la que se consideran los aspectos de proyección y homotecia, con sus correspondientes razones (Fig. 1).; *b*) cuando las figuras aparecen como figuras separadas. En el caso de que la aproximación al concepto no sea dentro de la ***relación intrafigural***, sólo se tendrá en cuenta si las figuras están en disposición homotética o se consideran como figuras separadas (Fig. 2).

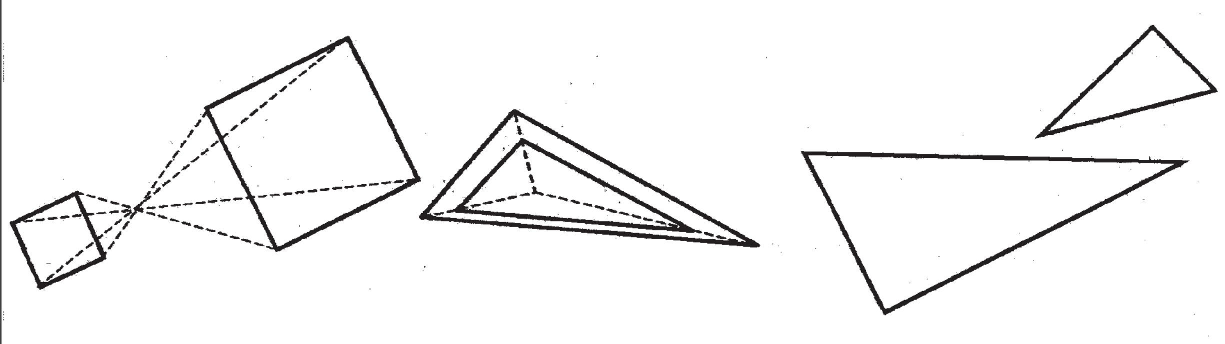
Figura 1
Ejemplos extraídos de Pfaff (97-98).



a) Aspecto de proyección

b) Aspecto de homotecia

Figura 2
Ejemplos extraídos de Lemonidis (1991).



a) Figuras en disposiciones homotéticas

b) Figuras separadas

Éstos son los referentes que consideraremos para el análisis de la semejanza en este trabajo. A continuación vamos a concretar nuestros objetivos y el contexto donde vamos a aplicarlos.

PROPÓSITO Y MÉTODO

El propósito general de este estudio es tratar de comprender las variaciones que se han producido, durante la segunda mitad del siglo XX, en la introducción al concepto de *semejanza*, y en la forma de establecerse las relaciones entre esta noción y el teorema de Thales, en el nivel 11-16 en los documentos curriculares, y cómo estas variaciones se han reflejado en diversos libros de texto de la época correspondiente. El motivo para la elección de este periodo de tiempo ha sido porque puede considerarse de alguna manera el contexto en que se han desenvuelto los profesionales de la enseñanza de la época actual.

Para ello centraremos nuestro interés en:

• la secuenciación del contenido que figura en los documentos oficiales de los distintos planes de estudio y en diversos textos escolares, estudiando la relación que se establece en ellos entre la semejanza y el teorema de Thales;

• la identificación de las aproximaciones al concepto que se destacan en esas colecciones.

Hemos adoptado una perspectiva temporal, distinguiendo, dentro de los planes de estudio de la época, los cuatro periodos siguientes:

1) Reforma planteada en el año 1957 al Plan de estudios del 53.

2) Plan desarrollado a partir de los cuestionarios de 1967 y de la Ley General de Educación de 1970.

3) Plan enmarcado en la LOGSE.

El criterio para la selección de los textos fue tratar de que fueran colecciones completas en el sentido de que abarcaran todos los cursos de los niveles educativos considerados, autores y editoriales de amplia divulgación en cada uno de los periodos. Se han utilizado 15 editoriales distintas, distribuidas según la tabla 1, donde utilizamos el primer número para indicar el periodo de tiempo y el segundo para la editorial. Queremos destacar que el objeto de nuestro estudio no ha sido una búsqueda exhaustiva de textos correspondientes a cada uno de los periodos, sino centrarnos en manuales muy utilizados en ellos que nos pueden dar una idea de la interpretación más usual de los contenidos considerados. No obstante, trataremos de recoger un número suficiente de editoriales, en un intento de apreciar si había una interpretación flexible y variada de lo redactado en las orientaciones curriculares en los distintos periodos.

LA SEMEJANZA COMO OBJETO DE ENSEÑANZA EN LAS ÚLTIMAS DÉCADAS

Reforma planteada en el año 1957 al Plan de Estudios del 53

De acuerdo con las directrices del Plan del 53, en la reforma que en el año 1957 se realiza, la geometría en el nivel elemental (11 a 14 años) adoptaba fundamentalmente el punto de vista sintético, aparece relegado el uso del sistema de coordenadas, aunque se asignen magnitudes a los segmentos y a los ángulos sus medidas, con lo que se aprecian algunas influencias de la geometría analítica; de hecho, algunos contenidos están inspirados en los *Elementos*, de Euclides. Se presenta, además, una geometría métrica, analítica y aspectos de geometría proyectiva en los niveles superiores (14-16).

El estudio de la semejanza aparece en los cuestionarios de segundo, tercero y quinto de bachillerato (BOE, 2-7-57; B.M. 1-8-57, 21-4-58 y 4-8-58). En el segundo curso (11-12), aparece con los epígrafes de: «Proporcionalidad de segmentos. Teorema de Thales y sus aplicaciones. Semejanza de triángulos. Casos de semejanza de triángulos. Semejanza de polígonos. Polígonos homotéticos. Figuras semejantes. Escalas. Construcción de polígonos semejantes. Razón de perímetros de polígonos semejantes». En el tercer curso (12-13), se incluye «una revisión de la semejanza de figuras planas y aplicaciones de la semejanza a la construcción de tercera y cuarta proporcionales y construcción de polígonos semejantes». Posteriormente, en el quinto curso (14-15) se contempla la semejanza dentro del epígrafe de «métodos especiales de la geometría métrica», donde figuran, junto con las transformaciones geométricas, los métodos de traslación, simetría, rotación y el de semejanza.

¿Cómo se reflejan estas orientaciones oficiales en las editoriales consideradas? El análisis realizado a la secuenciación del contenido, atendiendo a las relaciones que se establecen entre la semejanza y el teorema de Thales, ha permitido situar los textos de este periodo en un mismo bloque (Tabla 2).

Tabla 2
Editoriales del primer periodo.

– E1.1
Segura, S. *Matemáticas 1º (/ 2º/ 3º/ y 6º)*. Ecir. Valencia. 1960, 1964, 1964, 1968.
– E1.2
Pérez Carranza, E. *Matemáticas 1º (/2º/3º/4º/5º/6º)*. Summa, SL. Madrid. 1965, /65, /62, /65,/65, /65
– E1.3
Marcos, C. y Martínez, J. *Matemáticas 1º (/2º/3º/4º/5º)*. SM. Madrid 1962, /63,/62,/63, /62.

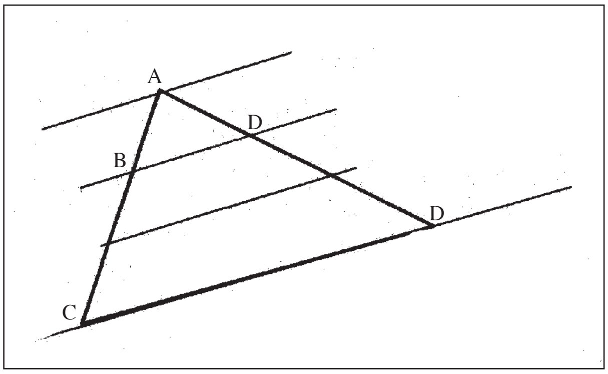
Tabla 1
Distribución de editoriales por niveles y periodos.

Periodos Niveles educativos	Reforma del 57 del Plan del 53	Plan desarrollado a partir de los cuestionarios de 1967 y de la LGE del 70			Plan enmarcado en la LOGSE		
Bachillerato elemental (10-14)	E1.1 E1.2 E1.3	E 2.4 E 2.5 E 2.6					
Bachillerato superior (14-16)	E1.2 E1.3	E 2.6					
EGB Última etapa (11-14)		E2.7 E2.8	E2.9 E2.10	E2.11 E2.12			
ESO (12-16)					E3.13 E3.14 E3.15	E3.16 E3.17 E3.18	E3.19 E3.20

Las tres colecciones se atienen con gran fidelidad a lo fijado sobre la semejanza para los cursos segundo y tercero en los programas oficiales. Se presentan algunas variaciones entre ellas en los textos de tercer curso al hacer la *revisión del tema del curso anterior*, ya que en las editoriales E1.1 y E1.3 se vuelve a introducir *el teorema de Thales y su recíproco y la razón de áreas y perímetros de dos polígonos semejantes*, lo que no se hace en la E1.2.

En ellas, el estudio del tema se inicia en el segundo curso con la *proporcionalidad de segmentos*, para segmentos conmensurables. Le sigue el *teorema de Thales* en un contexto métrico, haciendo una presentación del mismo basada en la proporcionalidad de magnitudes. En las tres colecciones, se trata de abordar la demostración del teorema con mayor o menor rigurosidad. En E1.1 se establece cierta generalidad para el caso de que los segmentos sean conmensurables, aunque se elude el caso de que los segmentos no lo sean. En las otras dos, se llega al enunciado del teorema utilizando ejemplos particulares de segmentos. Así, en el libro de segundo de E1.3, se utilizan segmentos cuyas razones son fracciones unitarias (1/2 y 1/3) que se colocan en una figura de rectas secantes cortadas por paralelas (Fig. 3) y se justifica que los segmentos correspondientes también determinan las mismas razones.

Figura 3
Extraído de Marcos y Martínez (1963).



La secuenciación continúa en las tres colecciones ciñéndose a lo anteriormente reseñado en los documentos oficiales, en las que se utiliza el teorema de Thales en la introducción de *los casos de semejanza de triángulos* (y llegando a demostrarlos en las dos primeras colecciones). Posteriormente, después de demostrar los casos de semejanza de triángulos, se da una definición de polígonos semejantes análoga a la anterior, donde sólo se cambia triángulos por polígonos.

En estos textos, suele figurar el estudio de polígonos homotéticos como aquéllos situados de una determinada forma. Por ejemplo, en los manuales de la colección E1.1 se indica:

«Polígonos homotéticos son dos polígonos situados de modo que las rectas que unen los puntos homólogos pasan por un punto fijo y los lados homólogos son paralelos» (1960, p.126), añadiéndose que dos polígonos homotéticos son semejantes.

En el curso tercero, además de la *revisión de las nociones* de segundo curso, el tema se centra en *la aplicación del teorema de Thales, de la semejanza o de la homotecia a la realización de construcciones geométricas*, terminando lo correspondiente al estudio de la semejanza en el bachillerato elemental.

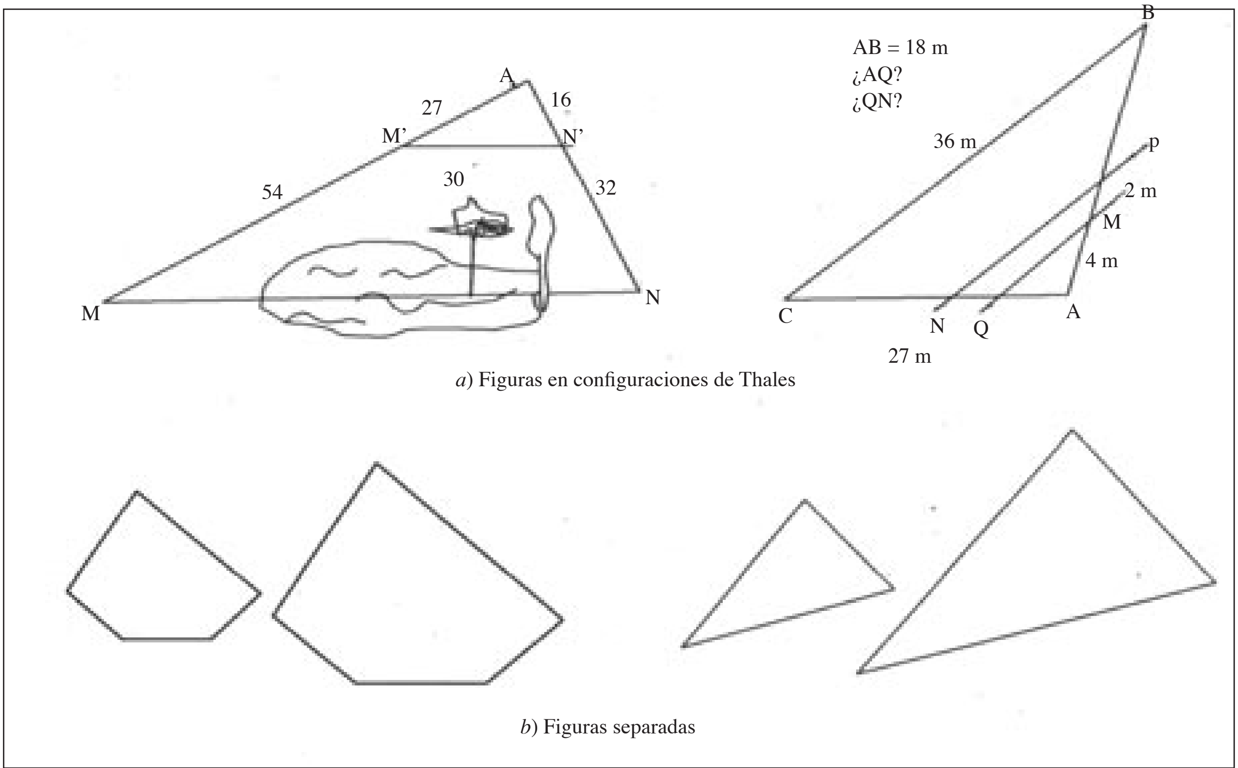
En cuanto al tratamiento del tema en el bachillerato superior, de los dos textos de quinto disponibles, la semejanza, y la homotecia como caso particular de ella, aparece como método para resolver problemas geométricos en el texto de la E1.2, no tratándose en la otra editorial. En su introducción se indica: *«Método de semejanza: Es el que utiliza la semejanza como transformación. Dicha semejanza puede o no ser una homotecia»* (1965, p. 58). Y se resuelven a continuación varios problemas, entre ellos el de construir un cuadrado inscrito en un triángulo. En la secuenciación planteada en las colecciones de textos analizadas, se aprecia aún la influencia de la geometría axiomática de Euclides, que había impregnado durante siglos la enseñanza de la geometría. El teorema de Thales está en un contexto rico, considerándose como objeto generador de nuevos conceptos (semejanza de triángulos, criterios de semejanza, figuras homotéticas, etc.). Con respecto a las relaciones que se establecen entre este teorema y la semejanza, para abordar la semejanza de figuras en general, se empieza por definir la semejanza de triángulos apoyándose en el teorema de Thales, que se extiende después a polígonos de mayor número de lados, hasta llegar al caso más general. Sin embargo, comprobar frente a demostrar (para segmentos conmensurables) es una de las diferencias que se establecen entre las colecciones a la hora de abordar la presentación del teorema.

Nos planteamos ahora qué aproximación subyace en el concepto de *semejanza* en los textos de este periodo. Las definiciones de figuras semejantes (y también de figuras homotéticas), incluidos tanto los triángulos como otros polígonos, que aparecen en estos textos destacan las características entre cada par de elementos correspondientes, estando ausente la idea de transformar una figura en otra, como se puede ver en la siguiente definición del texto de segundo de la colección E1.2:

«Dos triángulos son semejantes si sus ángulos son, respectivamente, iguales y los lados proporcionales. Es decir: los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes si se tiene: A=A', B=B', C=C', a/a'=b/b'=c/c'» (p. 144).

Con ello, se sigue la tradición de la geometría euclidea, permitiendo identificar una aproximación al concepto dentro de la ***relación intrafigural***. Dentro de esta aproximación, en las colecciones E1.1 y E1.3, las figuras que más abundan están dispuestas en configuraciones de Thales y homotéticas, apareciendo los dos aspectos de proyección y homotecia en forma variada (Fig. 4).

Figura 4

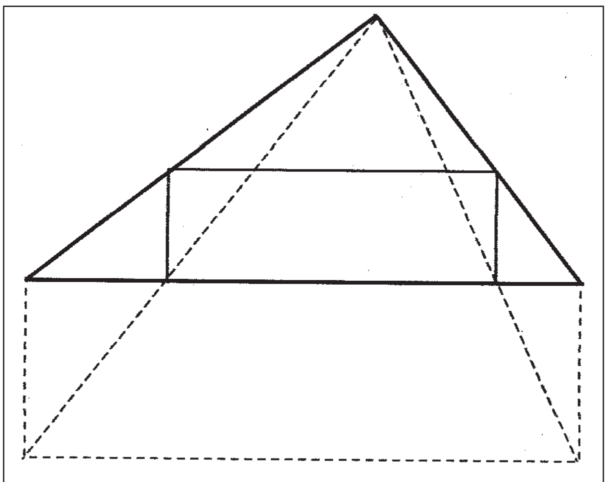


a) Figuras en configuraciones de Thales

b) Figuras separadas

Dicha aproximación se amplía en la colección E1.2 del bachillerato superior, ya que semejanza y homotecia se usan como métodos de resolución de problemas geométricos, en lo que subyace una aproximación dentro de la ***transformación geométrica vista como útil***, predominando las figuras en posiciones homotéticas (en la figura 5 se muestra la construcción de un rectángulo inscrito en un triángulo).

Figura 5
Extraída de Pérez Carranza (1965).



Plan desarrollado a partir de los cuestionarios de 1967 y de la Ley General de Educación de 1970

Este periodo está marcado por la incidencia de las ideas bourbakistas, que da lugar a la introducción de las llamadas «matemáticas modernas» en los niveles escolares, cuyos cimientos son la teoría de conjuntos y las estructuras. En nuestro país, dicho movimiento se impulsa a partir de 1961, desde la administración y con el apoyo de destacados matemáticos (Rico y Sierra, 1994). En este periodo, podemos distinguir dos momentos importantes marcados por las publicaciones desde la Administración educativa de los cuestionarios oficiales de bachillerato elemental de 1967 y de los derivados de la Ley General de Educación de 1970.

En relación con los cambios que se producen con la publicación de los cuestionarios de 1967 (BOE, 30-9-67 y 23-1-68), la geometría se sigue manteniendo en todos los cursos de bachillerato elemental, aunque se va a ir produciendo un alejamiento de los métodos de razonamiento de la geometría euclídea. Con respecto al tema de semejanza, en los programas oficiales se introduce en el tercer curso en tres temas: el primero con los epígrafes de «Proporcionalidad de longitudes. Triángulos en posición de Thales. Propiedades»; el segundo con «Triángulos homotéticos. Propiedades. Noción de homotecia. Construcciones»; y el tercero con «Triángulos semejantes. Semejanza. Escalas». En las orientaciones metodológicas se pone de manifiesto en el tratamiento del tema la influencia ejercida por las matemáticas modernas, indicándose, por ejemplo, que «a partir de aquí (se refiere al teorema de Thales) se puede estudiar la homotecia. La semejanza resulta como producto de una homotecia por un movimiento» (BOE, 30-IX-67). En estos cuestionarios, al introducir el estudio de los movimientos (en los dos primeros cursos) y recomendar definir la semejanza de la forma indicada, se aprecia una aproximación a la semejanza cercana a una ***transformación geométrica como objeto matemático***.

El hecho más importante de este periodo es la publicación de la Ley General de Educación de 1970, que transforma todo el sistema educativo (Rico y Sierra, 1994; García, 1980). Al hilo de estas modificaciones, se producen también cambios en las matemáticas escolares, acentuándose, en los nuevos programas de la Educación General Básica (EGB, 6-14 años), que pasa a ser obligatoria, y en los del Bachillerato Unificado Polivalente (BUP, 14-17), la orientación conjuntista y de las estructuras algebraicas. En el tratamiento de la geometría desaparecerán, de los programas, los métodos de razonamiento de la geometría euclídea, siendo sustituidos por métodos algebraicos y sacrificando aspectos visuales a favor de un planteamiento más abstracto (Sánchez, 1993).

En los cuestionarios de la EGB, prácticamente desaparece la geometría clásica, dándose prioridad a las propiedades topológicas y a las transformaciones de elementos geométricos. El tema de semejanza, aparece en octavo dentro de la geometría sintética, en los primeros programas que surgen en 1970 (*Vida Escolar*, 124-126), bajo los epígrafes de «Proporcionalidad de segmentos. Semejanza» y desaparece de ellos en las orientaciones que se dan en 1971 (*Vida Escolar,* 128-130).

En los cuestionarios de BUP establecidos en 1975 (BOE, 18-4-75) desaparece el tema de semejanza, abordándose la geometría en los cursos segundo (15-16) y tercero (16-17), desde un punto de vista vectorial y algebraico exclusivamente y perdiendo toda referencia a la intuición.

En los años setenta, la influencia de las matemáticas modernas empieza a disminuir en el ámbito internacional. Esta disminución fue dando lugar a cambios renovadores de los nuevos currículos, que van a atenuar la importancia dada al estructuralismo (Callejo y Cañon, 1996). En esta situación aparecen en la EGB los programas renovados (*Vida Escolar*, núm. 210, 1981) en los que se atenúa el carácter formalista y gana importancia la geometría, recomendándose su estudio intuitivo y descriptivo y sus relaciones con situaciones reales. La semejanza se introduce en el ciclo superior (nivel 11-14) en los bloques temáticos de tercero («Igualdad y semejanza en el plano») y sexto («Proporcionalidad geométrica y su relación con la medida»). Sin embargo, estos programas no se llegaron a aplicar debido al cambio de gobierno de la nación de 1982. En 1984, aparecieron nuevos programas (*Vida Escolar*, núm. 229-230) que se implantaron de forma experimental y que dieron paso a un enfoque relativista y no dogmático de la matemática (Callejo y Cañon, 1996).

Pasamos a continuación a analizar el tratamiento que se da al tema en los textos de bachillerato y de EGB de esta época que hemos considerado. Las nueve colecciones[1] de este periodo las hemos agrupado en tres bloques (Tabla 3).

El primero, P2.A, está caracterizado porque, en la secuenciación seguida y en la importancia que se da a la realización de construcciones geométricas desde un punto de vista sintético, se sigue apreciando una cierta influencia de la geometría euclidea, donde el teorema de Thales goza de un papel privilegiado para la generación de nuevos conceptos.

La colección E2.4 de este bloque podemos considerarla de «transición» entre el periodo anterior y éste. El tema estudiado se trata en los textos de sexto de enseñanza primaria (que se puede considerar paralelo en tiempo, aunque no en objetivos, al segundo de bachillerato elemental) y de tercero de bachillerato. En éste último, el teorema de Thales y los segmentos proporcionales están al inicio del tema y, posteriormente, la justificación de los criterios de semejanza se apoya en él, sin incluir el estudio de figuras homotéticas.

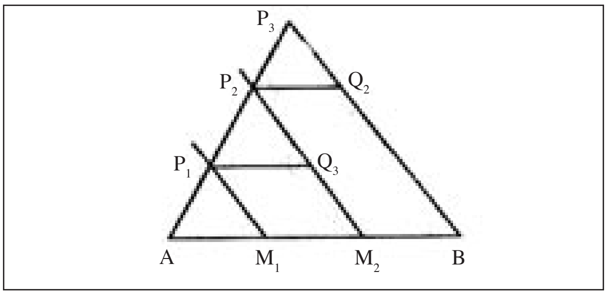
Tabla 3
Editoriales del segundo periodo.

P2.A	P2.B	P2.C
– **E2.4** Casulleras, J. y Carbonell, A. *Matemáticas 4º E.Primaria (/5º/6º)*. Prima Luce. Barcelona. 1968/ 67/67 Casulleras, J. y Carbonell, A. *Matemáticas 3º Bachillerato (/4º)*. Anaya. Salamanca. 1968 /70 – **E2.9** Gil, J. y otros. *Matemáticas 7º EGB*. Santillana. 1984 – **E2.10** Seminario didáctico «Bruño». *Matemáticas 7º EGB*. Bruño. 1988	– **E2.5** De Prada, V. y Cela, P. *Matemáticas 1º Bachillerato (/2º/3º)*. Iter. *Madrid*. 1970 /69/69 – **E 2.6** Marcos de Lanuza, F. *Matemáticas 1º Bachillerato (/2º/3º/4º/5º/6º)*. G. Del Toro. Madrid. 1968/ 71/ 72/71/72/72 – **E2.7** Luque, M. y Martínez, A. *Matemáticas 8º EGB*. S. Rodríguez. 1979 – **E2.8** Agustí, J.M. y Vila, A. *Matemáticas Línea-7 (/8)*. Vicens-Vives. 1984	– **E2.11** Equipo Signo. *Matemáticas 7º EGB*. Anaya. Madrid. 1983 – **E2.12** Equipo Granada Mats. L.Rico (coord.). *Matemáticas 7º EGB (/8º)*. Algaida. Anaya. 1985/85

La secuenciación identificada en las otras dos colecciones del bloque (E2.9 y E2.10) es la que Luengo y otros (1990) señalan como la seguida por la mayoría de los textos de EGB de los años ochenta: *«Cuestiones de proporcionalidad de segmentos → Secantes cortadas por paralelas → Teorema de Thales → Aplicaciones → Triángulos en posición de Thales → Triángulos semejantes → Polígonos semejantes → Figuras semejantes → Escalas»* (p. 37).

Aunque en todos los textos de este bloque se hace uso del teorema de Thales para introducir la semejanza de triángulos, podemos apreciar algunas diferencias entre ellos. Así, en la colección E2.4 se observa cierta influencia de las matemáticas modernas al incluir el estudio de los movimientos del plano (en el de sexto de primaria) y hacer uso de la traslación de segmentos en el paso previo al enunciado del teorema de Thales, que se justifica con casos particulares de segmentos conmensurables. En el libro de matemáticas de 6º de primaria de E2.4 (Fig. 6) se utiliza la traslación AP1 aplicada al triángulo AP_1M_1 para justificar que «al tomar los segmentos AP_1, P_1P_2 y P_2P_3 iguales por construcción, los segmentos AM_1, M_1M_2 y M_2B también son iguales».

Figura 6
Extraído de Casulleras y Carbonel (1967).



Las otras colecciones no están tan influenciadas por las matemáticas modernas. En ellas el tratamiento del teorema está muy sesgado a aspectos numéricos, comprobándose con casos particulares de segmentos, a los que se asigna su correspondiente valor numérico, y en los cuales la razón de segmentos tiene un tratamiento como razón numérica.

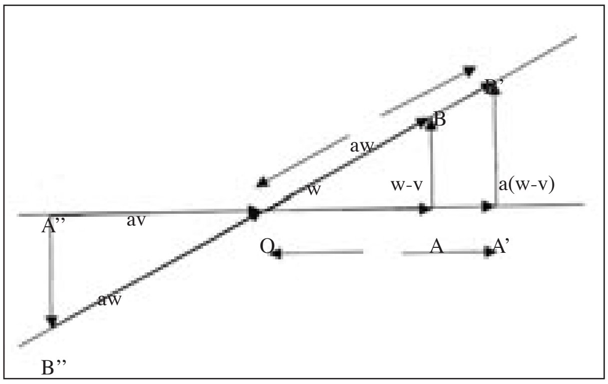
Sin embargo, en todos los textos de este bloque hemos identificado la misma aproximación a la semejanza dentro de la ***relación intrafigural***, coincidiendo con los textos del primer periodo. De manera análoga al periodo anterior, el tipo de figuras que aparecen en la introducción de conceptos y en las tareas son tanto formando parte de configuraciones como en posiciones separadas, y estas últimas abundan en problemas sobre escalas.

En los textos del bloque P2.B, el tema se trata en tercer curso de bachillerato para las colecciones E2.5 y E2.6, y en séptimo u octavo de EGB para las colecciones E2.7 y E2.8. La secuenciación seguida en todas ellas coincide en líneas generales con la de los cuestionarios oficiales de bachillerato elemental ya mencionada: *«Proporcionalidad de segmentos y teorema de Thales → Triángulos homotéticos y homotecia → Semejanza y escalas»*. Si profundizamos en la presentación del contenido que figura en los epígrafes para ver cómo se relacionan el teorema de Thales y la semejanza y para identificar la aproximación al concepto estudiado, en todos los textos, el teorema de Thales surge como una consecuencia inmediata, sin demostración, de otros conceptos, como pueden ser las propiedades de las razones de segmentos (consideradas como operadores) (en la E2.5), el concepto de *proyección paralela* (en E2.8) o bien utilizando notación vectorial (en las demás).

Por ejemplo, en las colecciones E2.6 y E2.7, el teorema se enuncia como consecuencia de la linealidad de la multiplicación de un escalar por un vector, utilizando la notación «A'B' = a·AB, siendo *a* un número racional». En particular, en el libro de 3º de la colección E2.6 se indica que:

«[…] el vector AB será la diferencia entre w y v (AB = w-v) y el A'B' aw – av, concluyendo que como A'B' = a·AB resulta que los vectores A'B' y AB tienen la misma dirección, igual sentido si a > 0 y sentido contrario si a < 0, siendo esta propiedad en esencia el Teorema de Thales» (p. 128). Dichos vectores aparecen en la figura 7.

Figura 7
Extraído de Marcos de Lanuza (1972).



Con respecto a la semejanza, la demostración de los criterios de semejanza se apoya en triángulos en posición de Thales o en triángulos homotéticos. En las colecciones E2.5 y E2.8, la secuenciación finaliza con la introducción de la noción de escalas. En la E2.6, dicha noción se introduce como aplicación de las construcciones homotéticas, finalizando con la definición de *semejanza de polígonos* en general. Por último, en la colección E2.7 no se introducen las escalas.

Podemos decir que en los textos de este bloque, por el tratamiento axiomático que se da al teorema de Thales y el que en algunas definiciones aparezca el concepto de transformación del plano o incluso la composición de transformaciones, se puede apreciar más la influencia de las matemáticas modernas que en los del bloque anterior de este mismo periodo. Una evidencia empírica de ello la podemos ver en la definición de homotecia que se da en el libro de la colección E2.7 (de 8º de EGB), cuando considerados en el plano un punto fijo O y un número racional K se dice:

«Si a cada punto A del plano hacemos corresponder otro A' tal que OA' = k · OA, tenemos una aplicación del plano en sí mismo que llamaremos homotecia» (p. 120).

En conclusión, en estos textos está implícito el concepto de transformación entre los puntos del plano, lo que nos lleva a identificar una aproximación a la semejanza dentro de la ***transformación geométrica como objeto matemático***. Pero, como también en todas las colecciones se destacan las relaciones entre los elementos homólogos de figuras semejantes, la anterior aproximación coexiste con otra dentro de la ***relación intrafigural***. Además, las figuras en las colecciones E2.5 y E2.7 aparecen casi exclusivamente en configuraciones homotéticas, con poca variación en sus posiciones, mientras que, en las otras dos colecciones, también aparecen algunas figuras en posiciones separadas, con mayor variedad en el tipo de figuras en la E2.8 (se da el aspecto proyección y homotecia).

Para el bachillerato superior, dentro de la colección E2.6, en el libro de quinto se introduce el producto o composición de varias transformaciones, entre ellas las que dan lugar a la semejanza. Pero además, de acuerdo con las recomendaciones oficiales vigentes, que para este nivel siguen siendo las del plan del 57, después de cada una de las transformaciones se introduce un método de resolución de problemas en el que se utiliza la transformación correspondiente, y se recoge una doble aproximación a la semejanza: ***transformación geométrica como útil y como objeto matemático***.

Por último, en el tercer bloque (P2.C) se incluyen colecciones con una secuenciación que sigue en líneas generales la identificada por Luengo y otros (1990) como minoritaria. Se introducen *figuras semejantes y escalas*, para, a partir de ahí, concretar primero a *polígonos semejantes en general* y, posteriormente, a *triángulos semejantes*. En una de estas editoriales, la secuenciación termina con el *teorema de Thales* y, en la otra, el teorema se introduce antes de *triángulos semejantes*. Aunque la forma de abordar el teorema sea comprobándolo mediante la medida de segmentos en casos particulares (análogo a las colecciones E2.9 y E2.10), su papel como elemento generador de otros conceptos pasa a un segundo plano, ya que no se usa para la introducción de la semejanza. La aproximación que se hace a la semejanza es dentro de la ***relación intrafigural***, como, por ejemplo, se puede apreciar en la siguiente definición de semejanza de figuras del texto E2.11:

«En general, a dos figuras con la misma forma en que los ángulos homólogos son iguales y los lados homólogos son proporcionales se les llama figuras semejantes» (p. 182).

Podemos decir que, en los textos de este bloque, se va produciendo un alejamiento de la influencia de las matemáticas modernas, notándose un enfoque más relativista y menos dogmático de las matemáticas. Los podríamos considerar como de transición para el siguiente periodo, en el que los documentos oficiales recomiendan partir de conceptos intuitivos y de distintos fenómenos y situaciones en los que se manifiesta el concepto.

En resumen, en los textos de este periodo, se aprecia la influencia de las matemáticas modernas con distinta intensidad. En algunas colecciones, coexiste esta influencia con la permanencia de una perspectiva euclídea, mientras que en otras la influencia es mucho mayor. Dentro de estas últimas, llama la atención que, en el nivel elemental, se da una doble aproximación al concepto, dentro de la ***relación intrafigural*** y de la ***transformación como objeto***, y que, sin embargo, en el nivel superior, aparezca la aproximación dentro de la ***transformación como útil.*** Hay que tener en cuenta que en este último nivel aún no se habían producido cambios en las orientaciones oficiales. Además, el tratamiento que se da al teorema de Thales también varía entre comprobación, demostración o considerarse como axioma, pudiendo ser o no utilizado para introducir la noción de semejanza.

Plan enmarcado en la LOGSE

La Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE, 3/10/90) dio forma jurídica a las propuestas de cambio que se realizaron en la comunidad educativa desde principios de los años ochenta y supuso la ampliación de la educación básica hasta los 16 años.

El currículo oficial de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) supone una ruptura epistemológica con los que se inspiraron en la Ley General de Educación de 1970. Los contenidos de geometría que se recogen en los nuevos currículos contienen puntos de vista tanto de la geometría sintética como de coordenadas y de geometría de las transformaciones y destacan la necesidad de que la enseñanza de estos contenidos tengan lugar en contextos, de manera que generen aprendizajes significativos, útiles y funcionales en la vida cotidiana de los ciudadanos. Lo que se desprende de estas consideraciones es que la secuencia de contenidos (en particular en geometría) no tiene por qué seguir la tendencia axiomática de la geometría euclídea, sino que se recomienda partir de conceptos intuitivos y de situaciones matemáticas de referencia, reintegrándose las figuras geométricas como elementos esenciales de este estudio.

En particular, si nos centramos en cómo aparece el tema que nos ocupa en los nuevos diseños curriculares de la Comunidad Autónoma Andaluza, el Decreto de Educación Secundaria Obligatoria (Junta de Andalucía, 1995) recoge el estudio de la semejanza en el bloque cuarto de la distribución de contenidos del área de matemáticas, que corresponden al estudio de «figuras, cuerpos y configuraciones geométricas». La secuenciación de contenidos que se propone distribuye los correspondientes al tema considerado de la siguiente forma:

a) En el primer ciclo (12-14):

«Reconocimiento, manipulación, construcciones, relaciones, medidas y propiedades elementales de: Proporcionalidad de segmentos. Cuarta y media proporcional (en el plano). Teorema de Thales (en el plano). Triángulos semejantes (en el plano).» (J.A., 1995, p. 166).

b) En el segundo ciclo (14-16), se considera el estudio de:

«Consecuencias del teorema de Thales: Semejanza de polígonos (plano). Acercamiento intuitivo a la razón áurea» (J.A., 1995, p. 171)

Además, en el cuarto curso de la ESO (15-16) se propone la profundización en algunas transformaciones geométricas, entre las que aparecen la homotecia y la semejanza como composición de ésta con movimientos.

¿Cómo quedan reflejadas las orientaciones en los libros de texto actuales de la Comunidad Autónoma considerada? En primer lugar, debemos señalar que, dado que las recomendaciones oficiales para la distribución de contenidos son por ciclo, se observan bastantes diferencias en cuanto a los cursos del correspondiente ciclo en los que se desarrolla el tema. Los textos de las ocho editoriales analizadas de este periodo presentan una gran diversidad atendiendo a su secuenciación, que nos ha permitido distribuirlas en cuatro bloques (Tabla 4)[2].

Para el bloque P3.A, en el primer ciclo (1º y 2º) ambas editoriales abordan el tema introduciendo actividades con escalas, mapas y planos o con la idea intuitiva de semejanza como «misma forma y variación de tamaño». En el segundo ciclo, los textos de 3º presentan una secuenciación análoga a los del bloque P2.A, con el teorema de Thales como punto de inicio para la introducción y estudio de nuevos conceptos (semejanza de triángulos, teoremas en el triángulo rectángulo, razones trigonométricas, etc.). Aunque el tratamiento del tema en los textos de 4º es distinto en cada una de las editoriales consideradas, en las dos se hace patente la influencia de la geometría de las transformaciones, ya que se introducen los movimientos y la homotecia, dando una definición de semejanza como composición de ambos. Así se puede ver en la siguiente definición del libro de 4º de E3.13:

«Una semejanza es una transformación geométrica que se obtiene como composición de una homotecia y un movimiento» (p. 139)

Podemos decir que, en este bloque, a una presentación más ligada a situaciones y fenómenos en el primer ciclo, le sigue otra mucho más próxima a la «tradicional» en el tercer curso del segundo ciclo, en la que el teorema de Thales se considera como punto de partida y vuelve a asumir algunas de las funciones que asumía en los planes del 57. En este sentido, de manera análoga a los textos del primer periodo, en ellos identificamos una aproximación a la semejanza dentro de la ***relación intrafigural***; las figuras aparecen en configuraciones de Thales y de forma homotética con más frecuencia que las que aparecen en posiciones separadas.

Por otro lado, la aproximación anterior se amplía en el 4º curso a considerarse dentro de la ***transformación geométrica vista como objeto matemático***, tanto por su definición como por el contenido de algunas de las tareas propuestas, como se puede ver en la siguiente, extraída del texto de 4º de la E3.13:

«Observa las coordenadas que se obtienen al aplicar a un punto P(x,y) una homotecia seguida de traslación y una traslación seguida de homotecia. Después contesta ¿es conmutativa la composición de una homotecia y una traslación?» (p. 140)

En el segundo bloque, P3.B, hemos situado aquellas colecciones con una secuenciación en la que en primer

Tabla 4
Editoriales del tercer periodo.

P3.A	P3.B	P3.C
– E3.13 Varios. *Matemáticas 1º ESO (2º/3º/4º).* Santillana. 2001, 2000, 1995, 1995 **– E3.14** Miñano, A. y Ródenas, J.A. *Matemáticas 1º ESO (2º/3º/4º).* Bruño: Madrid. 1998	**– E3.15** Pancorbo, L. y otros. *Matemáticas 1º ESO (2º).* McGraw Hill. 1996 Amigo, C. y otros. *Matemáticas 3º ESO (4º).* McGraw Hill. 1997 **– E3.16** Frias, V. y otros. *Matemáticas 1º ESO (2º/3º/4º).* Edelvives: Zaragoza. 1996/96/95/95 **– E3.17** Vizmanos, J.R. y Anzola, M. *Matemáticas 1º ESO (2º/3º/4º).* SM: Madrid. 1996/96/94/94 **– E3.18** Colera, J. y otros. *Matemáticas 1º ESO (2º/3º/4º).* Anaya: Madrid. 1996/97/96/95 **– E3.19** Castilla, E. y otros. *Matemáticas 1º ESO (2º).* La Ñ: 1998-99 Flores, M.C. y otros. *Matemáticas 3º ESO (4º).* La Ñ: . 1998-99	**– E3.20** Grupo Cero (Valencia). *Matemáticas para la Secundaria Obligatoria. I (/ II) Primer (/Segundo) ciclo de ESO.* MEC y Edelvives. 1995

lugar se introduce la semejanza de figuras, partiendo de la idea intuitiva de figuras semejantes o de planos, mapas y maquetas, para ir descendiendo a polígonos y a triángulos semejantes. Aunque el teorema de Thales se sigue manteniendo, ya no figura al principio de la secuencia. La importancia del teorema como elemento generador en la introducción de nuevos contenidos y de aprendizajes posteriores es distinta en estas colecciones. En la mayoría de ellas (E3.15, E3.16 y E3.17), el teorema se introduce para el estudio de los criterios de semejanza de triángulos y para la construcción de figuras homotéticas, aunque en el primer ciclo se aborde a través de actividades experimentales, basadas en la práctica de la proyección o como método para obtener triángulos semejantes, mientras que en el segundo ciclo se suelen hacer comprobaciones del mismo basadas en la medida de los segmentos y generalizando los resultados, aunque en algunos su enunciado esté restringido a triángulos. En los textos E3.18 y E3.19, el teorema no cumple esa función como elemento generador de otros, surge en actividades experimentales y, aunque se relaciona con triángulos semejantes, no se utiliza para justificar otras propiedades.

Con relación a la aproximación a la semejanza, también debemos hacer una diferenciación: *a*) Por un lado, en la mayoría de las colecciones hemos identificado las dos aproximaciones indicadas en el bloque anterior: dentro de la ***relación intrafigural*** para los textos del primer ciclo y de tercero del segundo, y ***transformación geométrica vista como objeto matemático*** en los de cuarto curso. Además, en el texto de cuarto curso de la E3.17 podría considerarse que hay un cierto acercamiento a la aproximación de ***transformación como útil***, al plantearse problemas que podrían resolverse mediante construcciones geométricas que incluyan transformaciones de homotecia o semejanza. *b*) Por otro lado, en las colecciones E3.18 y E3.19, en ambos ciclos, sólo se identifica la aproximación a la semejanza como ***relación intrafigural***, en la cual está ausente la noción de transformación geométrica.

Las figuras que se incluyen en los textos de este bloque aparecen en configuraciones geométricas de Thales y en posiciones separadas. Es de destacar que en muchos de los textos de este bloque se potencia también el aspecto geométrico del teorema, que se muestra en la preocupación por presentar variaciones en la forma de las configuraciones, en pico o mariposa y en destacar los aspectos de proyección y homotecia (Fig. 8).

Por último, los textos del último bloque considerado, P3.C, constituyen una excepción con respecto a todos los demás. En ellos prevalece el acercamiento a los conceptos a través de distintas situaciones y fenómenos variados. En el primer ciclo, se trabaja la proporcionalidad en su doble vertiente numérica y geométrica, por medio de distintas situaciones en las que, según palabras de los propios autores, «está presente el hecho proporcional». Todas las actividades giran alrededor del concepto de *escala*, entendido como factor de ampliación o de reducción. La introducción a la semejanza de figuras se hace a través de actividades que tratan de destacar los elementos que se mantienen y que cambian entre dos figuras semejantes, con lo que se aprecia una aproximación al concepto dentro de la ***relación intrafigural***, ya que está ausente toda idea de transformación geométrica. En el segundo ciclo, aparece la semejanza de polígonos como procedimiento de medida en situaciones inaccesibles, profundizándose en la semejanza de determinados polígonos. El teorema de Thales no se enuncia en ninguno de los ciclos.

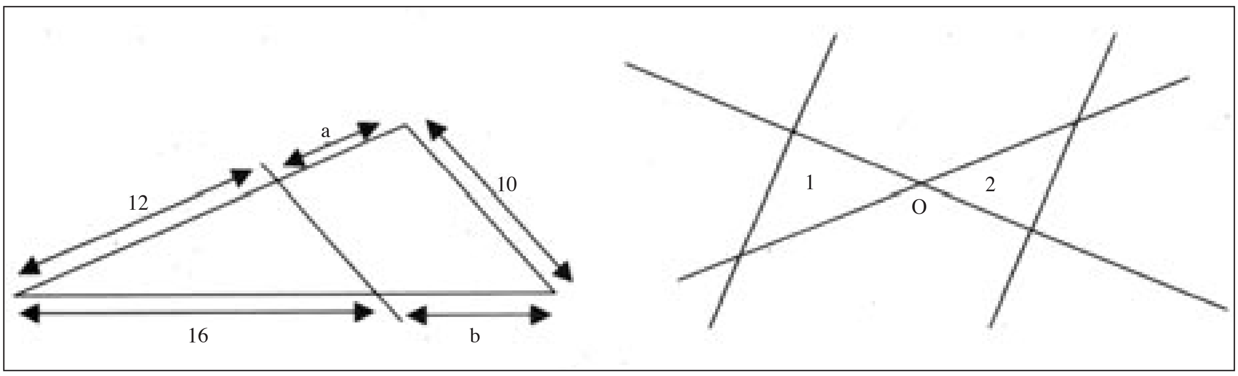
CONCLUSIONES

En primer lugar, queremos destacar que, tanto en los cuestionarios oficiales como en los libros de texto, se observa la influencia de las corrientes internacionales, aunque con retraso como ya han señalado otros autores (Sierra et al., 1999; Sánchez, 1993).

Nuestro estudio ha puesto de manifiesto bastantes diferencias en el tratamiento de la semejanza y su relación con el teorema de Thales tanto entre distintos periodos como dentro de uno mismo. En primer lugar, se ha hecho evi-

Figura 8

Configuraciones de Thales. Extraídas de Castilla y otros (1999).



dente el distinto tratamiento que se da entre los diferentes periodos debido a la influencia de distintas perspectivas que subyacieron en los diferentes documentos oficiales, lo cual ha dado lugar a que se den distintas aproximaciones al concepto, tal y como hemos ido indicando.

En segundo lugar, pensamos que la aportación principal de este trabajo ha sido poner de manifiesto que dentro de un mismo periodo también se dan grandes cambios, como se aprecia en el segundo y tercer periodo, aunque por motivos distintos.

La situación de cambio que se da en el segundo periodo da lugar a que en algunos textos (de bachillerato del 67 y EGB) se haga patente la influencia de las matemáticas modernas, llegando a tener el teorema un estatus de axioma, debido a la imposibilidad de hacer una demostración rigurosa del mismo (BOE, 30-9-67) e incluyéndose, a nivel elemental, una aproximación a la semejanza dentro de la ***transformación como objeto matemático***, ya que se presenta ésta como composición de otras transformaciones. Sin embargo, se corrige la inclinación formalista en otros textos, con lo que el teorema de Thales vuelve a tener un importante papel para la introducción de otros conceptos, de manera análoga al primer periodo (marcado por la influencia de la geometría euclidea). Todo esto coexiste con otra perspectiva en la que los autores tratan de presentar los conceptos conectados a situaciones matemáticas de referencia. En ellos, la razón de ser del teorema de Thales no es dar vida a otros conceptos, sino que se puede limitar al caso particular del triángulo, siendo su función principal situaciones de ampliación y reducción y de medidas indirectas.

En el tercer periodo considerado, el intento de flexibilizar la implementación en los centros del currículos ha dado lugar a mayor autonomía a las editoriales en la interpretación de las orientaciones curriculares de las Comunidades Autónomas, que ha repercutido en mayor diversidad en el tratamiento de la semejanza y teorema de Thales. En particular, en nuestra Comunidad Autónoma coexisten perspectivas análogas a las identificadas en los textos del primer periodo, junto a una cierta influencia de las matemáticas modernas en el tratamiento de las transformaciones, apreciada en el uso que se hace de algunos libros adaptados del segundo periodo. Entre estos dos polos, se mueven la mayor parte de los textos estudiados, identificándose, aunque minoritariamente un cierto acercamiento fenomenológico a los conceptos en algunos textos. Como en el caso anterior, la adopción de una u otra perspectiva implica diferentes relaciones entre el teorema de Thales y la semejanza y diferentes aproximaciones a la misma. Con respecto a ellas, en aquellas colecciones de textos en que se incluyen la aproximación como ***útil*** y/u ***objeto***, el tratamiento que se da a las mismas tiene menor grado de rigor que en los textos del periodo anterior.

El estudio realizado ha puesto de manifiesto la cantidad de restricciones que pesan en la enseñanza del teorema de Thales y la semejanza y su desplazamiento a voluntad de los cambios de planes, que lleva a plantearnos si la permanencia del teorema de Thales se debe menos a su papel como generador de otros conceptos (la coherencia interna del programa) que al peso de la tradición. Podemos preguntarnos si dicho debilitamiento podría conducir en el futuro a la desaparición del teorema de los niveles escolares (Matheron, 1993-94). En la actualidad, hay consenso en señalar la importancia de la semejanza en términos de situaciones matemáticas de referencia y de relaciones con contextos del mundo real (NCTM, 1989, 1995).

Queremos destacar que la necesidad de construir un currículo escolar para el siglo XXI en un momento en el que emergen nuevos contenidos hace necesario revisar contenidos clásicos. Mirando hacía ese futuro debemos señalar la importancia de facilitar el desarrollo de un amplio rango de formas de representar las ideas geométricas, que incluyan un acercamiento con coordenadas, vectores, transformaciones o desde el punto de vista de la geometría euclidiana y que permitan múltiples aproximaciones a los problemas geométricos, conectando las interpretaciones geométricas a otros contextos (NCTM, 2000).

Por último, en este trabajo se hace patente la importancia del análisis del libro de texto para mostrar la variación que han presentado los conceptos como objeto de enseñanza-aprendizaje. Como señala Shubring (1987), «la práctica de la enseñanza en el aula no está tan determinada por los decretos y órdenes ministeriales como por los libros de textos utilizados», a lo que podemos añadir el uso que se hace de ellos.

NOTAS

[1] Hemos de señalar que la facilidad de disponer de más textos escolares en estos últimos años, junto con la mayor afluencia de editoriales, nos ha llevado a introducir en los dos últimos periodos mayor variedad de textos.

[2] En este periodo, salvo en una editorial que hay un texto en cada ciclo, todas las demás constan de cuatro textos, uno por cada curso. El tema se incluye en los dos ciclos, que pueden estar en cualquiera de los dos cursos del primero de ellos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BERGER, M. (1990). *Géométrie*. París: Nathan.

CALLEJO, M.L. y CAÑON, C. (1996). Cambios epistemológicos en educación primaria en España desde 1970, en Gimenez, J., Llinares, S. y Sánchez, V. (eds.). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Granada: Comares.

CORDIER, F. y CORDIER, J. (1991). L'application du théoréme de Thales. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs. Recherches en Didactique des Mathématiques, 11(1), pp. 45-64.

COXETER, H.S.H. (1971). Fundamentos de geometría. Mexico: Limusa-Wiley, SA.

DUPERRET, J.C. (1996). Por un Thales dinámico, en Barbin, E. y Douady, R. (coords.). *La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica*. Pub. del IREM.

GARCÍA,V. (1980). *La educación en la España del siglo xx*. Madrid: Ediciones Rialp.

GARCÍA, M. y LLINARES, S. (1996). El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución. *Qurriculum*, 10-11, pp. 103-115.

GONZÁLEZ, M.T. y SIERRA, M. (2003). El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático, en Castro, E. et al. (eds.). *Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM), pp. 107-130. Granada.

JUNTA DE ANDALUCÍA (1995). *Materiales curriculares para la Educación Secundaria Obligatoria*. Junta de Andalucía, Consejería de Educación y Ciencia.

LEMONIDIS, C. (1990). «Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie». Tesis doctoral. Université Louis Pasteur. Strasbourg.

LEMONIDIS, C. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. Recherches en Didactique des Mathématiques, 11(23), pp. 295-324.

LUENGO, R. et al. (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Síntesis.

MARTÍNEZ, R. et al. (1984). *Matemáticas*-1 (Escuelas Universitarias de profesorado de EGB). SM Ediciones.

MATHERON, Y. (1993-94). Les repercussions des changements de programme entre 1964 et 1989 sur l'enseignement du theoreme de Thales. *Petit x*, 34, pp. 59-87.

NCTM. (1989). Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics. Reston, Va.: NCTM. Trad. cast. (1991). Sevilla: SAEM THALES.

NCTM. (1995). Assesment Standards for School Mathematics. Reston, Va.: NCTM.

NCTM. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston VA.: NCTM.

SÁNCHEZ, G. (1993). Perspectiva histórica de las reformas de los currículos de matemáticas. *Epsilón*, pp. 26, 31-46.

SCHUBRING, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as textbook autor. For the Learning of Mathematics, 7(3), pp. 41-51.

SIERRA, M., GONZÁLEZ, M.T. y LÓPEZ, C. (1999). Evolución histórica del concepto de *límite funcional* en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias,* 17(3), pp. 463-476.

RICO, L. y SIERRA, M. (1994). Educación matemática en la España del siglo xx, en Kilpatrick, J., Rico, L. y Sierra, M. *Educación matemática e investigación*, pp. 99-207. Madrid: Síntesis.

VIDA ESCOLAR. (1970, 1971, 1981). Núm. 124-126, 128-139, 229-230.

VINOGRÁDOV, I.M. (1993). Enciclopedia de las Matemáticas. Moscú-Madrid: Mir-Rubiños.

[Artículo recibido en diciembre de 2003 y aceptado en junio de 2005]