DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES EN LA INTERPRETACIÓN DE LAS SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS QUE MODELAN UN PROBLEMA

Guerrero Ortiz, Carolina[1]; **Camacho Machín, Matías**[2] **y Mejía Velasco, Hugo Rogelio**[1]
[1] Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV
[2] Didáctica de la Matemática, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna
cguerrero@cinvestav.mx
mcamacho@ull.es
hmejia@cinvestav.mx

Resumen. En este trabajo se analizan algunas de las dificultades que surgen en el momento de interpretar las soluciones de una ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) cuando se expresan en forma gráfica y algebraica. La investigación se llevó a cabo con estudiantes de ingeniería que estaban al final de un primer curso de EDO, los cuales realizaron varias actividades en un ambiente dinámico incluyendo algunas relacionadas con la interpretación de las soluciones representadas en forma algebraica y gráfica de una EDO que modela el comportamiento de una población. Se encontró que, aun cuando los estudiantes dominaban algunas herramientas algebraicas para resolver una EDO, no las utilizaban para interpretar el comportamiento de las soluciones dentro del registro gráfico. Además, al trabajar con el campo de direcciones para obtener información sobre las soluciones de la EDO su uso fue sólo local, esto es, centraron su atención en regiones relativamente pequeñas del campo de direcciones.

Palabras clave. Ecuaciones diferenciales ordinarias, interpretación, registros de representación, dificultades.

Difficulties experienced by students in the interpretation of the solutions of ordinary differential equations that models a problem

Summary. In this work we analyzed some of the difficulties that arise when the student interpret the solutions of Ordinary Differential Equation (ODE) when they are expressed in graphical and algebraic form. The investigation was carried out with Engineering students who were at the end of a first course of ODE, who realized some activities in a graphical dynamic environment that included the interpretation of the solutions represented in algebraic and graphic form of a ODE that models the behavior of a population. One the one hand, even though the students dominated some algebraic tools to solve a ODE, they did not use them to interpret the behavior of the solutions within the graphical registry. On the other hand, when they working with the field of directions to obtain data on the solutions of the ODE its use was only local, that is to say, focused its attention on relatively small regions of the field of directions.

Keywords. Ordinary differential equation, interpretation, difficulties, registers of representations.

INTRODUCCIÓN

La modelación e interpretación de problemas que conducen a una ecuación diferencial forma parte de los currículos de estudios universitarios del área de ciencias y tecnología. Diversos planes de estudio de un curso de introducción a las ecuaciones diferenciales sugieren integrar en su enseñanza el uso del registro gráfico como recurso didáctico para la visualización de campos de direcciones y curvas solución (Guerrero, 2008), por lo que el empleo de herramientas tecnológicas adecuadas puede facilitar aquellos aspectos visuales que acabamos de mencionar.

Creemos que la interpretación de las soluciones de una ecuación diferencial expresadas en forma gráfica y algebraica, debería constituir uno de los objetivos principales de un curso de ecuaciones diferenciales, para lo que resulta fundamental hacer una reflexión sobre cuáles son las dificultades que se encuentran los estudiantes cuando resuelven ecuaciones diferenciales que modelan fenómenos de diferente naturaleza. Desde esta perspectiva nos preguntamos: ¿qué conocimientos previos de cálculo diferencial utilizan los estudiantes al bosquejar campos de direcciones?, ¿cómo interpretan los estudiantes las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria cuando éstas se presentan en forma gráfica?, ¿hay alguna diferencia en la interpretación cuando la solución se expresa en forma algebraica?, ¿qué papel puede jugar un *software* particular en la interpretación que realizan los estudiantes?

El objetivo general de este trabajo consiste, por una parte, en determinar y clasificar las dificultades que encuentran los estudiantes cuando resuelven tareas que modelan un fenómeno determinado y, por otra parte, en estudiar el papel que juega el registro gráfico en la aparición de esas dificultades cuando se trata de interpretar las soluciones y los campos de direcciones de las EDO.

En definitiva, con esta investigación nos proponemos los siguientes objetivos:

1. Analizar las dificultades que tienen los estudiantes, relacionadas con sus conocimientos básicos de cálculo diferencial, cuando tratan de representar los campos de direcciones y las soluciones de una EDO de primer orden.

2. Determinar las dificultades que surgen a partir de la interpretación de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden cuando son representadas en los registros gráfico y algebraico.

3. Analizar la influencia del uso de un *software* dinámico en la interpretación de los campos de direcciones y de las soluciones de una EDO.

Utilizaremos en nuestra investigación el marco teórico propuesto por el enfoque lógico semiótico (ELOS), que nos servirá para establecer una clasificación de las dificultades encontradas por los estudiantes, y que posteriormente nos permitirá sentar las bases para el desarrollo de una secuencia de enseñanza.

Nuestro trabajo futuro está orientado a proponer estrategias de actuación que contribuyan a mejorar la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en los primeros cursos universitarios de carreras de ciencias e ingeniería. En una primera fase se diseñará una secuencia de enseñanza basada en la resolución de problemas y el uso de herramientas tecnológicas, en la que uno de los objetivos principales será el de presentar tareas que ayuden a los estudiantes a superar las dificultades que tienen en el momento de interpretar soluciones y trabajar en distintos registros de representación, para posteriormente analizar la viabilidad de su desarrollo en el aula. Posteriormente, en una segunda y última fase, se analizará la viabilidad del desarrollo en el aula de dicha secuencia, así como las posibilidades de extensión de la metodología para la enseñanza y aprendizaje de EDO de orden superior y sistemas de EDO.

ANTECEDENTES

En los últimos años se ha venido proponiendo una reforma a los cursos de introducción a las ecuaciones diferenciales (Arslan, Chaachoua y Laborde, 2004; Buchanan, Manar y Lewis, 1991; Hernández, 1995). Esta reforma incluye la integración de las representaciones gráfica y numérica como una herramienta para la resolución e interpretación de las soluciones. En este sentido, trabajos como los de Buchanan y otros (1991), Gollwitzer (1991), Moreno y Laborde (2003), y Blanchard (1994) han mostrado que, gracias a diversos paquetes computacionales –que permiten visualizar campos de direcciones, curvas solución, y la expresión algebraica de las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales– es posible mejorar su aprendizaje.

Desde el punto de vista de la investigación se ha podido constatar que existen dificultades por parte de los estudiantes a la hora de interpretar las soluciones de una EDO, tanto cuando se dispone de información gráfica como al expresar algebraicamente lo que se observa gráficamente. Algunas investigaciones recientes han presentado resultados en este sentido. Habre (2000) identificó las diferentes estrategias que utilizan los estudiantes al resolver EDO, y Rasmussen (2001) desarrolló un marco para interpretar la comprensión de los estudiantes y las dificultades que tienen con ideas matemáticas centrales de las ecuaciones diferenciales. Camacho, Perdomo y Santos Trigo (2007) observaron que, en líneas generales, la idea que tienen los estudiantes de resolver una ecuación diferencial se reduce a la aplicación de algoritmos específicos de clasificación y resolución de las EDO.

Estos autores han señalado que los estudiantes muestran cierto rechazo a utilizar herramientas gráficas para resolver ecuaciones diferenciales y que tienen dificultades al trabajar en diferentes registros de representación.

Desde el punto de vista de la enseñanza, hace más de dos décadas, Tall (1986) puso de manifiesto la importancia de utilizar el estudio cualitativo de las soluciones de ecuaciones diferenciales, para interpretar correctamente su proceso de resolución y desarrolló un *software* específico (Graphic Calculus), con el que pretendía facilitar la comprensión del concepto de ecuación diferencial incorporando en su configuración el tratamiento gráfico, numérico y algebraico conjuntamente.

Posteriormente, Artigue (1992) realizó un estudio con el propósito de explorar la enseñanza y aprendizaje de las EDO de primer orden mediante un estudio cualitativo de sus soluciones. Los estudiantes que participaron en la investigación, después de realizar un curso en el que se alternaban sesiones de laboratorio haciendo uso de ordenadores, con clases habituales de tiza y pizarra, fueron capaces de resolver una serie de actividades en las que se requería la correcta interpretación de los registros gráfico y numérico. Una de las tareas consistía en asociar un número determinado de curvas solución de una EDO de primer orden con su respectivas ecuaciones diferenciales y justificar tal asociación. Los estudiantes fueron capaces, siguiendo algunas indicaciones del profesor, de identificar las ecuaciones con sus diferentes curvas solución, haciendo uso de criterios tales como: la monotonía de las curvas, los ceros de la función *f(x,y)* (las EDO venían dadas explícitamente de la forma *y' = f(x,y)*), las pendientes verticales, valores concretos para la función *f(x,y)* y la pendiente de la curva solución en ese punto. Sin embargo, Rasmussen (2001), utilizando una tarea similar –pero presentando más curvas solución que ecuaciones– observó que, aunque los estudiantes respondían correctamente en algunos casos, poseían una concepción incorrecta del concepto de solución de equilibrio. Particularmente, encontró que no consideraban los esquemas gráficos del comportamiento asintótico como gráficas de funciones solución de la EDO y que los puntos de equilibrio eran vistos sólo como números y no como funciones constantes. En un problema donde planteaba a los alumnos determinar las soluciones de equilibrio y describir el comportamiento de la población en el límite, los alumnos representaron gráficamente tales soluciones, pero fueron incapaces de interpretar el comportamiento de las soluciones a lo largo del tiempo. Según Rasmussen, esto se debe a que los estudiantes consideran que las curvas que bosquejan representan un test de estabilidad y no una expresión gráfica de las funciones que resuelven la EDO. Es decir, para ellos, tales gráficas no representan la evolución de la población en el tiempo, sino que son esquemas que carecen de significado cuantitativo. Por otra parte, también identificó la dificultad que tienen al centrar su atención en cantidades importantes en las gráficas y lo relacionó con el hecho de que prestan atención a cantidades que no son fundamentales. En algunos casos que involucran ecuaciones diferenciales de segundo orden y sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, los estudiantes interpretan las gráficas como imágenes literales de la situación modelada en lugar de centrarse en las cantidades representadas.

MARCO TEÓRICO

En esta investigación, utilizaremos la interpretación y correlación entre las dificultades, errores y obstáculos propuesta por Socas (2007), lo cual se enmarca dentro de la aproximación teórica que propone el enfoque lógico semiótico.

«La investigación desde el enfoque lógico semiótico (ELOS) trata de elaborar modelos teóricos y prácticos (Modelos de competencia), a partir del análisis empírico, que aporten los supuestos básicos que permitan interpretar fenómenos específicos que se dan en Educación Matemática, así como los métodos de investigación y resultados que se deben tomar como evidencias».

En su trabajo, Socas establece un modelo de competencia cognitivo para el aprendizaje del lenguaje algebraico, donde una de sus componentes fundamentales está constituida por el estudio de las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del álgebra.

Por otra parte, los planteamientos de Duval (1998) sobre los registros de representación semiótica nos permitirán determinar el tipo de errores que subyacen en las dificultades que hemos encontrado en los estudiantes que desarrollaron nuestra experiencia.

Al igual que Socas (2007), consideramos que las dificultades pueden tener diversos orígenes y que, en este caso, los registros de representación juegan un papel fundamental en la interpretación que realizan los estudiantes, ya que el uso de diferentes registros acarrea por sí mismo sus propias dificultades.

Socas (1997) relaciona y clasifica las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas, y señala que:

«Las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores.»

Las dificultades pueden ser de diversa índole: algunas asociadas a la propia disciplina, que tienen que ver con objetos matemáticos y los procesos de pensamiento, otras ligadas a los procesos de enseñanza y a los procesos cognitivos de los alumnos o a la falta de una actitud racional hacia las matemáticas. En cuanto a los errores Socas, al igual que Bachelard (1938) y Brousseau (1983), señala que tienen procedencias distintas y que en todo caso se consideran como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como la falta específica de un conocimiento. Estos autores consideran que los obstáculos que se presentan pueden ser de origen ontogénico, didáctico o epistemológico; particularmente estamos interesados en los obstáculos de origen epistemológico que están relacionados con el propio concepto. Un obstáculo se caracteriza como aquel conocimiento que ha resultado en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas; en otras palabras, resulta eficaz para el alumno sólo en cierto contexto, pero cuando se usa ese conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, razón por la cual Socas recomienda como indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.

Entre las dificultades que existen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales se han encontrado obstáculos en la integración de distintos registros de representación (Hernández, 1995). Al respecto de esto, Duval (1998) señala que existe un encasillamiento en el uso de un solo registro de representación semiótica, es decir, los alumnos no reconocen el mismo objeto a través de las diferentes representaciones que se dan de él. Duval indica que se requiere, al menos, la coordinación de dos registros de manera espontánea para alcanzar la comprensión de un concepto. De hecho la comprensión queda limitada al contexto semiótico de un solo registro de representación, dando como resultado que los conocimientos adquiridos mediante un registro difícilmente se puedan movilizar a otras situaciones, lo que desemboca en el desarrollo de conexiones cognitivas muy débiles al coordinar los registros gráfico y algebraico. Por ejemplo, al tratar con una función y sus derivadas cuando éstas no se expresan mediante fórmulas, no existe una red fuerte de relaciones gráficas e intuitivas que permita obtener ciertas propiedades cualitativas (concavidad, puntos de inflexión, crecimiento, decrecimiento, etc.) o de manera más general dar argumentos y justificaciones en el registro gráfico a fin de dibujar la gráfica correspondiente. Estas dificultades, que generalmente se presentan en el curso de cálculo, se trasladan al contexto de las ecuaciones diferenciales donde la idea de función como solución y función como parte de la misma ecuación diferencial crean más confusión en los estudiantes.

METODOLOGÍA

En nuestra investigación nos planteamos analizar la actuación de un grupo de estudiantes al final de su curso de introducción a las EDO. Para ello se diseñó una aplicación informática y se analizó el proceso de resolución que siguen cuando resuelven dos tareas basadas en una aplicación informática diseñada al efecto (objetivos 2 y 3). Previamente, los estudiantes respondieron a dos cuestionarios mediante los cuales analizamos los conocimientos básicos de cálculo diferencial necesarios para trabajar con las EDO (objetivo 1).

Participantes

El estudio se llevó a cabo con 14 estudiantes del segundo semestre de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales, quienes accedieron a participar voluntariamente en cinco sesiones adicionales a su curso de Ecuaciones Diferenciales. En el momento de la experimentación estaban por concluir el único curso de ecuaciones diferenciales que deben tomar en toda la licenciatura. La formación que recibieron los estudiantes estuvo guiada por el uso de dos libros Ross (1995) y Zill (1988), ocupándose principalmente en cubrir los temas: definición y solución de ecuaciones diferenciales de primer orden, segundo orden y de orden superior, transformada de Laplace y solución de ecuaciones diferenciales usando series de potencias.

Aunque el programa de estudios indica que debe introducirse el registro gráfico como medio de solución de ecuaciones diferenciales, estos estudiantes no tuvieron un acercamiento geométrico formal a la resolución de EDO. Como parte de la investigación se entrevistó a varios profesores que impartían la materia, incluyendo el profesor responsable de la asignatura, quienes manifestaron que, debido a la cantidad de material que debe cubrirse durante el curso, resulta casi imposible trabajar con los otros registros de representación adicionales al algebraico.

Instrumentos de recogida de la información

Se utilizaron tres instrumentos para recoger la información: dos cuestionarios (C1 y C2; anexos 1 y 2) y dos tareas (T1 y T2; anexo 3) que los estudiantes tenían que responder haciendo uso de un Applet elaborado a partir de la plataforma Descartes (Figura 1). La naturaleza de las tareas era esencialmente distinta a la de los cuestionarios, en el sentido de que durante su resolución se les cuestionaba sobre algunos aspectos que permitieran clarificar las respuestas a los distintos interrogantes planteados.

Los datos que utilizaremos en la presentación y discusión posterior proceden, por tanto, de las aportaciones de los cuestionarios, del material escrito durante la resolución de las tareas T1 y T2 y las observaciones registradas por el equipo investigador a partir de las aclaraciones que hicieron los alumnos de la resolución de las tareas mientras las cumplimentaban.

Las respuestas dadas por los estudiantes a los cuestionarios y a las tareas, nos permitieron detectar las posibles trayectorias de razonamiento que siguieron durante su resolución. En este sentido, encontramos algunas regularidades e inconsistencias que nos llevaron a buscar información en la literatura referente a las dificultades de aprendizaje que se presentan no sólo en las ecuaciones diferenciales sino en algunos aspectos de cálculo y álgebra.

En el siguiente apartado se describirán con mayor detalle los instrumentos utilizados contextualizados en el marco de las diferentes sesiones en que se utilizaron.

Desarrollo de la investigación

Aparte de sus sesiones habituales de clase, los estudiantes desarrollaron cinco sesiones con una duración de dos horas cada una. En las dos primeras, cumplimentaron los cuestionarios escritos C1 y C2. En la tercera sesión, se introdujo la plataforma computacional que sería utilizada posteriormente para la resolución de las tareas (T1 y T2) y se dedicó una parte del tiempo para que analizaran el contexto del problema que resolverían en las sesiones posteriores. Las dos últimas sesiones fueron dedicadas a la resolución, por parte de los estudiantes, de las tareas T1 y T2 que se presentan en el anexo 3. Dichas tareas se relacionan directamente con la descripción del comportamiento de las soluciones de una EDO que modela la variación de una población de peces en un lago a lo largo del tiempo. El escenario computacional preparado para la investigación tenía la característica de que permitía modificar algunos de los parámetros de la EDO y mover dinámicamente la gráfica de las soluciones para posicionarlas en diferentes condiciones iniciales.

En la primera sesión, los estudiantes cumplimentaron el cuestionario C1, cuyo objetivo principal era explorar qué elementos básicos del curso de Cálculo Diferencial recordaban, con la intención de analizar si los utilizaban correctamente en el contexto de las ecuaciones diferenciales. Los conceptos analizados fueron el de derivada de una función, recta tangente a una curva y sus diferentes relaciones. Asimismo, se incluyeron algunas cuestiones para determinar la concepción que tienen de ecuación diferencial, solución y campo de direcciones asociado a una EDO.

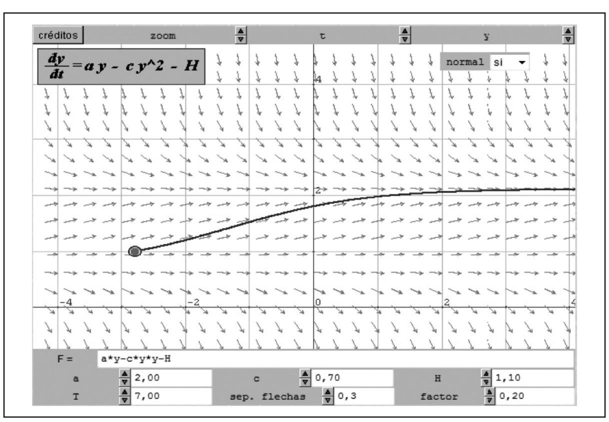
Durante la segunda sesión, los alumnos respondieron el cuestionario C2. El cuestionario se elaboró con el objeto de identificar con más detalle los conocimientos que los estudiantes poseen sobre el trazado de campos de direcciones y curvas solución de una EDO[1]. Se trataba de observar cuáles son los datos que pueden extraer cuando poseen únicamente información gráfica.

En la tercera sesión, por una parte, se desarrolló el proceso de modelación por el cual se obtiene la ecuación diferencial que modela un problema de crecimiento de la población de peces en un lago y, por otra, los estudiantes se familiarizaron en el laboratorio de ordenadores con el escenario computacional desarrollado por el equipo investigador.

En la cuarta y quinta sesiones, resolvieron las tareas T1 y T2 respectivamente. En la tarea 1 los alumnos participantes en la investigación tenían que responder una serie de preguntas sobre las soluciones de la EDO de primer orden que modela el comportamiento de una población de peces en un lago, haciendo un análisis de la expresión algebraica de la solución. En la tarea T2 se pedía a los estudiantes que hicieran una interpretación del comportamiento de la población mediante el análisis de las curvas solución, utilizando para ello el escenario computacional que habíamos preparado y en el cual se mostraba el campo de pendientes y una trayectoria solución (Figura 1). Los estudiantes podían manipular los parámetros involucrados, a fin de observar diferentes comportamientos[2].

Figura 1

Escenario computacional tomado y modificado del Proyecto Descartes.



ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

Pasemos ahora a realizar el análisis detallado de los datos recolectados durante el desarrollo de la investigación.

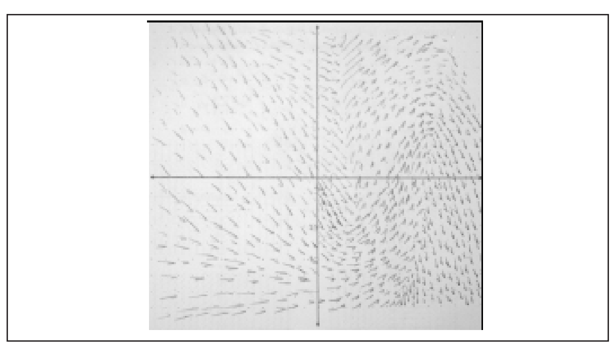
Con el cuestionario C1, utilizado en la primera sesión, se identificó si los estudiantes tenían los conocimientos básicos de cálculo diferencial necesarios para llevar a cabo el resto de las actividades. De sus respuestas a los apartados 1,2 ,7 y 8 (anexo 1) podemos deducir que tienen en general una idea de lo que es una ecuación diferencial y su solución o soluciones. Además, se observó una cierta destreza en la resolución algebraica de ecuaciones elementales. Los alumnos, en líneas generales, mostraron su dominio de los métodos algebraicos de resolución cuando respondieron a la pregunta 8 de este cuestionario. Los ejemplos de EDO que presentaban los resolvían mostrando pocos errores de cálculo.

Atendiendo a las respuestas dadas en los apartados 3, 4 y 5, observamos que la mayoría de los estudiantes pudo dar una definición de recta tangente a una curva, aunque al responder a los apartados 4 y 5 escasamente usaron notación algebraica, es decir, sus definiciones fueron en general verbales. En particular, las respuestas al apartado 4 mostraron que los estudiantes no consideran que la curva $f(N)$ representa una función. En cuanto a su conocimiento sobre campos de direcciones (apartado 6), sólo 6 alumnos de los 14 participantes dieron algunas respuestas que relacionaron con las curvas solución de la EDO. Este último hecho nos confirma que existe poco dominio del acercamiento geométrico. Para profundizar más sobre este asunto comentamos las respuestas obtenidas en la segunda sesión.

En relación con el cuestionario C2 (sesión 2), el primer apartado pedía dibujar el campo de direcciones asociado a la ecuación diferencial $\frac{dN}{dT} = f(N)$ siendo $f(N)$ una función representada gráficamente. Sólo la mitad de los participantes fueron capaces de dar alguna respuesta. En general, el campo de direcciones que bosquejaron estos alumnos estaba compuesto por trazos de curvas similares a la función $f\left(N\right)$ trasladadas verticalmente, tal y como se muestra en la siguiente figura.

Figura 2

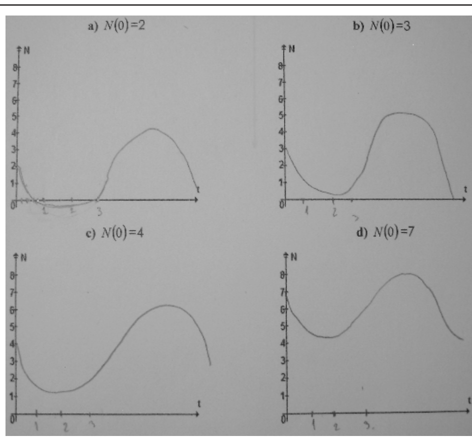
Siete alumnos trazan curvas formadas por pequeños segmentos similares a la curva *f(N)* con desplazamientos horizontales.



Estos mismos alumnos –cuando se les pidió que trazaran una curva solución con las condiciones iniciales, $N(0) = 2$, $N(0) = 3$, $N(0) = 4$ y $N(0) = 7$, y describieran el comportamiento de la población– nuevamente reprodujeron una curva de forma parecida a la original *f(N)* (Figura 3). En otras palabras, los estudiantes consideraron la curva *f(N)* como la solución de la ecuación diferencial. Se observó también, que estos mismos estudiantes fueron incapaces de describir el comportamiento de la gráfica de una función mediante su derivada y que tuvieron dificultades cuando se les preguntó sobre el concepto de recta tangente a una curva (C1).

Constatamos, con esto, un resultado similar al de Rasmussen (2001), en el sentido que, cuando los estudiantes no poseen una expresión algebraica explícita para la ecuación diferencial, no logran obtener información de ella, situación similar a la señalada por Hitt (1995), quien indica que parte de los problemas que tienen los estudiantes con el concepto de función se deben a que siempre asocian una función a una expresión algebraica que la define. En este caso se puede observar que utilizan incorrectamente la única información que poseen para la interpretación de las soluciones de una ecuación diferencial, aunque esta información sólo sea gráfica.

Figura 3
Curvas solución que trazan los estudiantes en distintas condiciones iniciales.



Este ejemplo muestra, además, que los estudiantes no lograron establecer una relación entre sus conocimientos previos de cálculo diferencial (concepto de derivada y recta tangente a una curva) con los campos de direcciones de una ecuación diferencial. Pese a que en la primera sesión mostraron que algo recuerdan del tema, los resultados en esta etapa de la investigación evidencian la presencia de una dificultad al usar sus conocimientos fuera del contexto en el que fueron aprendidos.

Las tareas T1 y T2 (anexo 3) nos permitieron analizar la interpretación que hicieron de la solución de una EDO que modela un problema de población de peces en un lago, cuando se les presenta de forma algebraica y gráfica. En particular la ecuación $y' = 7y - 3y^2 - 2$, cuya solución algebraica es

$$y(t) = \frac{2(1-3y_0) - e^{-5t}(2-y_0)}{1-3y_0-3e^{-5t}(2-y_0)}$$

siendo la condición inicial $y_0 = y(0)$ [3]

La tarea T1 estaba dedicada a la interpretación de la solución algebraica de la EDO y la tarea T2 se orientó hacia la interpretación de las curvas solución de la misma ecuación. Nuestro propósito era identificar las diferencias entre la interpretación que hacían y las dificultades que se presentan, así como las estrategias que utilizan para obtener información del registro gráfico. Específicamente, en la primera tarea (T1) se preguntó sobre los valores de y_0 donde las soluciones son constantes y se pidió una descripción del comportamiento de la población cerca de estos valores y en las regiones comprendidas entre las soluciones constantes, además del comportamiento de la población en todo tiempo, todo esto mediante el análisis de la expresión algebraica de la función solución. Las preguntas de la tarea T2 son las mismas que las de la primera, pero profundizando en el análisis de algunas regiones y con el apoyo del escenario computacional.

En el primer caso, únicamente cinco alumnos encontraron las dos soluciones constantes $y_0 = 2$, $1/3$, aunque ninguno de ellos fue capaz de obtenerlas, resolviendo la ecuación de segundo grado $7y - 3y^2 - 2 = 0$, esto es, a partir de considerar $y' = 0$. Su estrategia de solución consistió en el uso del ensayo y error, es decir, sustituyendo diferentes valores en la expresión de la solución hasta obtener una constante. A partir de este hecho, podemos señalar la existencia de dificultades al relacionar la solución de la EDO con la propia ecuación diferencial, en el sentido de que las soluciones constantes son también funciones que deben satisfacer la EDO y por tanto se puede resolver considerando $7y - 3y^2 - 2 = 0$. Esta estrategia de solución, basada en el ensayo y error, se relaciona con la dificultad descrita por Rasmussen (2001), que provoca que los estudiantes consideren las soluciones constantes sólo como números y no como funciones que describen el comportamiento de la población a lo largo del tiempo y en este caso funciones que satisfacen la EDO.

El resto de alumnos no ofreció información suficiente o sólo dio una interpretación parcial del comportamiento de la población. Algo similar ocurrió al preguntarles sobre la población en intervalos entre las soluciones de equilibrio: 7 alumnos realizaron una interpretación parcial, considerando sólo alguna de las regiones arriba o abajo de $y_0 = 2$ o de $y_0 = 1/3$; sin embargo no presentaron la justificación algebraica de sus afirmaciones. Cuando se les preguntó sobre el comportamiento de la población a lo largo del tiempo, 10 alumnos afirman que las soluciones tienen sentido para cualquier valor del tiempo y, nuevamente, no justifican sus afirmaciones, es decir, no recurren a estudiar el comportamiento de la expresión cuando t tiende a infinito calculando

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2(1-3y_0) - e^{-5t}(2-y_0)}{1-3y_0-3e^{-5t}(2-y_0)}$$

o, en el caso más sencillo, no consideran la relación del tiempo con el contexto del problema. Destacamos estas características, ya que los resultados de las sesiones anteriores muestran que estos alumnos dominan, en líneas generales, las herramientas algebraicas; sin embargo, es probable que al intentar manipular algebraicamente la información olviden el contexto del problema que se ha modelado. Este comportamiento nos permite afirmar que los estudiantes encuentran una dificultad relacionada con la falta de articulación entre el registro algebraico y el contexto del problema.

La tarea T2 se refiere a la interpretación mediante la visualización de las curvas solución. Los estudiantes manipularon el escenario computacional de manera que el campo de direcciones y las curvas solución que resultan de $y' = 7y - 3y^2 - 2$ son las que aparecen en la figura 4, en la cual se pueden ver las soluciones para diferentes condiciones iniciales. En el desarrollo de esta actividad, se observó que los alumnos realizan un análisis que va más allá de lo que la tarea requiere, no tienen problemas al identificar las soluciones de equilibrio, comienzan a hacer un análisis en otras regiones del campo de direcciones; sin embargo, cuando se les pide que hablen del comportamiento de las soluciones que se encuentran cerca de las soluciones de equilibrio, su análisis es sólo local y olvidan generalmente una de las dos regiones en las que la solución de equilibrio divide al campo de direcciones. Por ejemplo, al preguntar ¿cuál es el comportamiento de la población de peces cuando y_0 está cercano a $y_0 = 2$?, los estudiantes se limitan a describir sólo uno de los casos $y_0 > 2$ o $y_0 < 2$. En general los alumnos centran su atención sólo en algunas regiones del campo de direcciones. En este sentido, los procesos de enseñanza que habitualmente se siguen sin hacer uso de la tecnología, limitan enormemente la posibilidad de visualizar local y globalmente tanto los campos de direcciones como las curvas solución.

Por otra parte, en la misma actividad y después de que los estudiantes exploraron los comportamientos de las soluciones en diferentes condiciones iniciales, al responder a la pregunta ¿qué sucede cuando la población inicial y_0 cumple que $y_0 > 2$?, algunos alumnos hablan de soluciones estables e inestables y de las regiones en que las soluciones no tienen sentido. Esto nos permite conjeturar que en estas actividades se da un proceso de aprendizaje que surge de la manipulación automática, facilitada por el *software*, por la manipulación de los parámetros de la EDO y por la visualización de las curvas solución. Por ejemplo, un estudiante indicó para la figura 4:

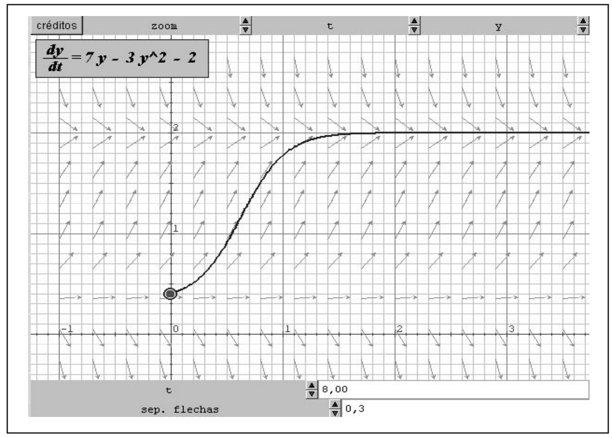
«Sí, es fácil decir que si los peces son mayores a 2 y mayores que un tercio… la población será constante y si en cambio se acerca a un tercio por su izquierda la población aumentará, si es un tercio se indetermina el posible comportamiento, si es menor a un tercio se mueren todos. Todo depende del número inicial de peces para apreciar el comportamiento en el infinito».

Creemos que el trabajo con el *software* facilita que surjan diversos aspectos que permiten profundizar en la interpretación de fenómeno modelado, como por ejemplo: condiciones iniciales, comportamiento en el infinito, estabilidad e inestabilidad.

Se observó también que en el desarrollo de las actividades planteadas a partir del registro gráfico los estudiantes utilizan muy poca notación matemática en sus respuestas, y menos aún para justificarlas. Este resultado concuerda con Duval (1997) y Hitt (1998), quienes señalan la existencia de un encasillamiento en el uso aislado de los registros de representación, haciéndose patente con ello la dificultad que poseen los estudiantes a la hora de coordinar diferentes registros de representación.

Figura 4

Campo de direcciones asociado a la ecuación $y' = 7y - 3y^2 - 2$.



De la comparación entre las respuestas dadas por los estudiantes al cuestionario C2 y de sus actuaciones cuando resuelven las tareas T1 y T2, observamos que inicialmente no son capaces de construir un campo de direcciones y mucho menos obtener información de él y, sin embargo, a pesar de que no tienen experiencia previa en el análisis cualitativo, son capaces de interpretar y darle sentido al campo de direcciones cuando empiezan a trabajar con el escenario computacional. Podemos concluir además que el trabajo con esta herramienta les ha conducido a indagar sobre el comportamiento de las soluciones cuando se modifican los parámetros en la EDO. En este sentido, señalamos que la interpretación del registro gráfico en términos del contexto del problema parece no presentar dificultades cuando se utiliza un escenario dinámico, pues los estudiantes manejan ambos registros simultáneamente. No obstante, es importante indicar que no debemos olvidar la necesidad de formalizar y dar significado a la conversión entre los registros gráfico y algebraico.

CONCLUSIONES

En relación con el primer objetivo de nuestra investigación, hemos podido constatar que los estudiantes recuerdan algunas definiciones de cálculo diferencial y ecuaciones diferenciales únicamente de manera verbal, es decir, han memorizado el enunciado que las describe; sin embargo, les resulta imposible aplicarlas en un nuevo contexto de conocimiento, tal y como hemos señalado al analizar el bosquejo de campos de direcciones e interpretación de las soluciones de una EDO. En cuanto al trabajo de los alumnos en el registro gráfico para la interpretación de las soluciones, es muy clara la escasez de notación matemática o el uso de alguna estrategia matemática para justificar sus afirmaciones, hecho que justifica nuevamente que los estudiantes encuentran muchas dificultades cuando se trata de trabajar coordinadamente en distintos registros de representación.

De acuerdo al análisis y discusión de los resultados que hemos realizado en el apartado anterior y en relación con las otras dos preguntas de investigación: ¿Cómo interpretan los estudiantes las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria cuando éstas se presentan en forma gráfica? y ¿hay alguna diferencia en la interpretación cuando la solución se expresa en forma algebraica?, podemos concluir, en relación con el objetivo 2, que los estudiantes evidencian varias dificultades que limitan la comprensión e interpretación de las soluciones en los diferentes registros de representación semiótica. Hemos constatado, en particular con el cuestionario C2 y la tarea T2, que algunos de los estudiantes no lograron hacer uso del registro algebraico para justificar las afirmaciones obtenidas de manera visual. Asimismo, se observó que al interpretar las soluciones mediante el estudio algebraico de la solución de la EDO tienden a olvidar el contexto del problema, es decir, no logran articular el contexto y registro algebraico (tarea T1). Estas dificultades tienen que ver con la falta de articulación y el uso simultáneo de diferentes registros de representación. Conjeturamos, en términos de Socas (1997, 2007), que estas dificultades están ligadas a los procesos cognitivos que desarrollan los estudiantes.

Constatamos, por otro lado, que cuando los estudiantes no conocen la expresión algebraica de una EDO, no logran obtener información de ella (cuestionario C2). Se observa que tampoco relacionan las soluciones de la EDO con la propia ecuación y consideran las soluciones constantes sólo como números y no como funciones constantes (Rasmussen, 2001). (tarea T1). Se encuentra también la presencia de dificultades provocadas por la forma errónea de entender los conceptos básicos del cálculo diferencial, especialmente por las concepciones que poseen sobre función, tangente y derivada de una función. Varios autores han documentado (Harel y Dubinsky, 1994; Rasmussen, 2001; Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2007) que la comprensión correcta de esos conceptos presentan una serie de dificultades que, en nuestro caso, son trasladadas al contexto de las ecuaciones diferenciales. La representación grafica y dinámica de las soluciones que se presentan en la tarea T2 evidencian este tipo de dificultades que, tal y como señalaremos posteriormente, es uno de los aspectos en los que se busca profundizar para solventar estas dificultades. Conjeturamos que este tipo de dificultades provienen de las dificultades propias de la disciplina (Socas, 1997, 2007), es decir, están relacionadas con el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Particularmente tienen que ver con la adquisición de un conocimiento sin la comprensión del concepto por sí mismo.

Un tercer tipo de dificultades que encontramos son las que Socas (1997, 2007) describe como relacionadas con los procesos de enseñanza. En nuestro caso, el poco uso del registro gráfico en la enseñanza y la poca legitimidad institucional que se da al trabajo con dicho registro durante la enseñanza (González-Martín y Camacho, 2004) hacen que los estudiantes se muestren reacios a utilizarlos para la resolución de sus actividades. Verificamos este tipo de dificultades en la resolución de aquellas actividades en las que los alumnos deben describir globalmente el comportamiento de los campos de direcciones y curvas solución (tarea T2).

Este análisis que hemos realizado, en el que se trata de determinar los elementos que generan la presencia de estas dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, resultará útil para la elaboración de la propuesta de enseñanza que se pretende diseñar, dado que se buscará que los estudiantes realicen tareas en las que se evidencien estas dificultades para enfrentarlos desde el comienzo con ellas y utilizarlas como elementos de enseñanza y aprendizaje y no como una labor remedial. Al respecto Socas (2007) ha señalado:

«… Observamos que cuando el error se mira a niveles más profundos, es decir, se considera no sólo la estructura superficial del objeto sino también la estructura profunda, esta falta de generalidad podría evitarse, ya que si se mira en los niveles de representación más profundos, en los que evolucionan los sistemas de significados que controlan las realizaciones superficiales, cuando se detectan principios erróneos, en este nivel profundo, es posible explicar no sólo un caso, sino toda una clase de errores».

En relación con el tercer objetivo de nuestra investigación, se puede concluir, como consecuencia del análisis realizado en el apartado anterior, que a los estudiantes les resulta más significativa la representación gráfica y dinámica de las soluciones, puesto que su característica dinámica les permite interpretar y recuperar información a partir del estudio del campo de direcciones. Esta afirmación apoya la idea de que se deben introducir elementos gráficos desde el inicio de la enseñanza de las EDO. Sustentamos esta afirmación tanto en la predisposición que mostraron los estudiantes cuando se introdujo la plataforma computacional, como en los avances que se observaron en la interpretación de las soluciones y en la profundidad del análisis que realizaron. Conjeturamos que, mediante la implementación conjunta de los registros algebraico y gráfico con ayuda de un medio computacional desde el inicio del curso de ecuaciones diferenciales, se podrán construir gradualmente los conceptos asociados a una ecuación diferencial y el significado funcional de la solución o soluciones de las ecuaciones diferenciales. Creemos también que es relevante la elección del contexto que se haga para las actividades, en el sentido de que dicho contexto tenga algún significado en el entorno en el que se desarrollan los estudiantes.

Como trabajo futuro, trataremos de encontrar estrategias de actuación que favorezcan el tránsito entre los registros y la interpretación contextual de la información en cada registro, para lo cual debemos desarrollar actividades que destaquen la identificación de los parámetros y su influencia en la solución o en la misma ecuación diferencial, situación que puede ser mejor realizada con ayuda de herramientas tecnológicas. En este sentido, las actividades que conducen a una ecuación diferencial a través de la modelización de fenómenos conocidos pueden ayudar a que los estudiantes relacionen significativamente los parámetros de la ecuación con ciertas características del fenómeno.

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por la beca del CONACYT (México) con número de referencia 169440 y el Proyecto de Investigación con referencia EDU 2008-05254 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Plan Nacional I+D+i del Gobierno de España.

NOTAS

1. Esta actividad se modificó de la que utilizó Rasmussen (2001, pp. 65).
2. El escenario computacional utilizado en esta última sesión fue tomado y modificado de un applet elaborado dentro del Proyecto Descartes promovido y financiado por el Ministerio de Educación, Política Social y Deporte de España, y que además permite ser editado y modificado libremente por el profesor para adaptarlo a las necesidades específicas del curso. <http://descartes.cnice.mecd.es/Documentacion_3/mates/ecdif/ecdif.htm>.
3. Donde *y(t)* representa la cantidad de peces, medida en toneladas.
4. Esta sesión de actividades se apoyó con el uso de un applet modificado del Proyecto Descartes y se preparó en una página Web en donde se mostró a los alumnos toda la información relevante relacionada con la obtención de la EDO que modela el problema.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARSLAN, S., CHAACHOUA, H. y LABORDE, C. (2004). *Reflections on the teaching of differential equations: What effects of a teaching to algebraic dominance* <http://www.icme-organisers.dk/tsg12/papers/arslan-tsg12.pdf».

ARTIGUE, M. (1992). Functions from an Algebraic and Graphic Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices, en Harel, G. y Dubinsky, E. *The concept of function. Aspects of epistemology and Pedagogy,* 25, pp. 109-132. MAA notes USA.

BACHELARD, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. París: De Vrin. (Traducción al castellano, 1985. *La formación del espíritu científico*. México: Siglo Veintiuno).

BLANCHARD, P. (1994). Teaching Differential Equations with a Dynamical Systems Viewpoint. *The College Mathematics Journal*, 25(5), pp. 385-395.

BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistèmologiques et les problémes en didactique en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2).

BUCHANAN, J.L., MANAR, T.J. y LEWIS, H. (1991), en Zimmermann, W. y Cunnigham, S. (eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Mathematical Association of America, USA, pp. 139-146.

CAMACHO, M., PERDOMO, J. y SANTOS TRIGO, M. (2007). La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: Un estudio exploratorio, en Camacho, M., Bolea, P., Flores, P., Gómez, B., Murillo, J. y González, M.ª T. (eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM*. Tenerife, pp. 87-106.

DUVAL, R. (1988). Graphiques et Equations: L'Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, pp. 235-253. IREM de Strasbourg.

GOLLWITZER, H. (1991). Visualization in differential equations, en Zimmermann, W. y Cunnigham, S. (eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Mathematical Association of America, USA, pp. 149-156.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. y CAMACHO, M. (2004). Legitimization of the graphic register in university teaching. The case of the improper integral, en *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp. 479-486.

GUERRERO, C. (2008). *Interpretación de las Soluciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Estrategias y Dificultades*. Tesis de maestría. Cinvestav, México.

HABRE, S. (2000). Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(4), pp. 455-472.

HAREL, G. y DUBINSKY, E. (Eds.) (1992). *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

HERNÁNDEZ, A. (1995). *Obstáculos en la Articulación de los Marcos Numérico, Gráfico y Algebraico en relación con las Ecuaciones Diferenciales*. Tesis de doctorado. Cinvestav, México.

HITT, F. (1995). Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Revista Educación Matemática*, 7(1), pp. 63-75, abril 1995.

HITT, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Revista Educación Matemática*, 10(2), pp. 23-45, agosto 1998.

MORENO J. y LABORDE, C. (2003). Articulation entre cadres et registres de représentation des équations différentielles dans un environnement de géométrie dynamique. *Actes du Congrès Europèen ITEM*, Reims, France.

RASMUSSEN, C. (2001). New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20(1), pp. 55-87.

ROSS, S.L: (1995). Introducción a las ecuaciones diferenciales. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

SOCAS, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. La Educación matemática en la enseñanza secundaria*. Cap V, pp.113-141, Rico, L y otros (1997). Universitat Barcelona: Horsori. I.C.E.

SOCAS, M. (2007). Dificultades y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico, en Camacho, M., Bolea, P. y Flores, P. (eds.). *Investigación en Educación Matemática. XI Simposio de la SEIEM*. Tenerife, pp. 19-52.

TALL, D. (1986). Lies, DAmn Lies… and Differential Equations. *Mathematics Teaching,* 114, pp. 54-57.

ZILL, D.C. (1998). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

[Artículo recibido en junio de 2009 y aceptado en mayo de 2010]

ANEXO 1

Cuestionario 1 (C1).

1. ¿Qué es una ecuación diferencial?
2. ¿Qué tipos de fenómenos físicos puedes describir con una ecuación diferencial?
3. ¿Qué es una recta tangente a una curva?
4. Si tuvieras una curva como la siguiente, ¿cómo describirías su comportamiento usando la derivada de *f(x)*?

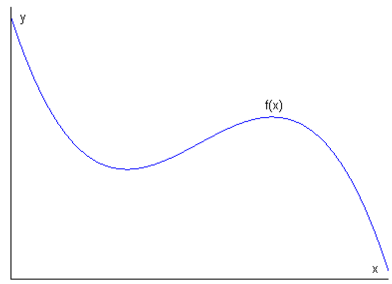


Fig C1

5. Si *f(x)* es una función real y (x_0, y_0) es un punto de la gráfica de *f(x)*. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente que pasa por (x_0, y_0)?
6. ¿Qué es un campo de direcciones?
7. ¿Describe qué es una solución de una ecuación diferencial ordinaria de la forma $y' = f(x, y)$?
8. Da un ejemplo de una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$ y una solución de la misma.

ANEXO 2

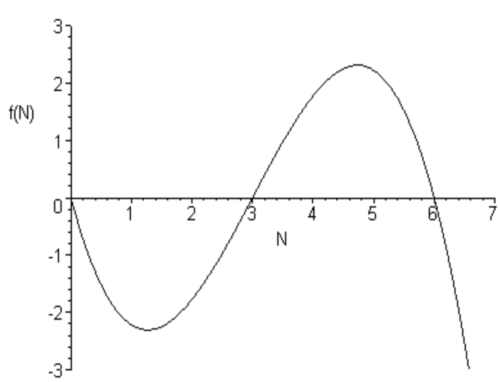
Cuestionario 2 (C2).

1. Supongamos que una población es modelada por la ecuación diferencial $\frac{dN}{dt} = f(N)$ donde la gráfica de *f(N)* se muestra a continuación

1.a) Bosqueja en la hoja adicional el campo de direcciones de la ecuación diferencial.

1.b) Bosqueja la gráfica que describe el comportamiento de la población a lo largo del tiempo para los siguientes valores iniciales:

a) $N(0) = 2$	b) $N(0) = 3$
c) $N(0) = 4$	d) $N(0) = 7$



ANEXO 3

Tareas[4].

Introducción

1. Para realizar esta actividad es necesario que abras la página Web llamada **Problema de población** y que leas la información sobre el desarrollo de un modelo que describe el comportamiento de una población de peces. Con base en la información presentada responde a las siguientes preguntas:

– ¿Qué describe $y(t)$?

– ¿Qué representa el parámetro a?

– ¿Qué representa el parámetro c?

– ¿Qué representa el parámetro H?

Problema

En un lago la población de peces se mide periódicamente. Si la población de peces en un instante t es $y(t)$, y suponemos que el crecimiento real de la población se incrementa continuamente, llamaremos a este incremento $y'(t)$ o simplemente y'. Observaciones a lo largo del tiempo sugieren que tanto el índice de natalidad como el de mortalidad son proporcionales al tamaño de la población; por tanto, se tiene lo siguiente:

– Incremento de natalidad en un instante t: $b.y(t)$.

– Incremento de la mortalidad en el instante t: $(m + c.y(t))\, y(t)$.

Donde b, m y c son constantes de proporcionalidad no negativas. Obsérvese que junto al parámetro m que representa la mortalidad natural se considera el factor de sobrepoblación $c.y(t)$ como elemento que incrementa la mortalidad. Si la *pesca anual* se denota por H, tenemos la siguiente ecuación:

$$y'(t) = b.y - (m + c.y).y - H$$

Es decir,

$$y'(t) = a.y - cy^2 - H$$

Donde la constante $a = b - m$ se considera positiva, y es llamada *factor neto de incremento de población*. Utiliza el modelo presentado en la actividad anterior. Considera, en este caso, valores específicos para los parámetros *a, c y H* de la ecuación diferencial.

Si consideramos los valores $a = 7$, $c = 3$, $H = 2$, en la ecuación diferencial (2), entonces obtenemos una ecuación de la forma

$$y' = 7y - 3y^2 - 2 \quad (2.1)$$

cuya solución es

$$y(t) = \frac{2(1 - 3y_0) - e^{-5t}(2 - y_0)}{1 - 3y_0 - 3e^{-5t}(2 - y_0)}$$

donde y_0 es el valor inicial de la población en el tiempo $t = 0$. Si deseas ver cómo se obtiene esta solución ve a la página que refiere la opción desarrollo de la solución.

TAREA 1 (T1)

Dada la solución $y(t)$ de la ecuación (2.1), contesta a las siguientes preguntas.

a) ¿Para qué valores de y_0 las soluciones son constantes? ¿Cuáles son estas soluciones constantes? ¿Qué sucede con la población en estos casos?

b) Describe qué sucede con las soluciones que se encuentran en los intervalos entre las soluciones constantes. ¿Qué sucede con la población en estos casos?

c) Dado que la ecuación diferencial describe una población de peces, ¿las diferentes soluciones tienen sentido para todo el tiempo $t > t_0$?

TAREA 2 (T2)

Para contestar a las siguientes preguntas ve a la página que refiere la opción Actividad 2.2

Analiza el campo de direcciones y responde a las preguntas.

a) ¿Cuál es el comportamiento de la población de peces cuando $y_0 = 2$ y cuando $y_0 = \frac{1}{3}$? Localiza estas soluciones en el campo de tangentes.

b) ¿Cuál es el comportamiento de la población de peces cuando y_0 está cercana a $y_0 = 2$? ¿Cuál es el comportamiento de la población de peces cuando y_0 está cercana a $y_0 = \frac{1}{3}$?

1.1. ¿Está definida para todo tiempo $t > t_0$?

1.2. ¿Qué sucede cuando $t \to \infty$? Describe el comportamiento en términos de la población de peces.

a) ¿Qué sucede cuando la población inicial y_0 cumple que $y_0 > 2$? Describe el comportamiento en términos de la población de peces.

b) ¿Para qué poblaciones iniciales las soluciones no tienen sentido para todo tiempo $t > t_0$ en el modelo de la población de peces? Describe qué sucede en estos casos.

Difficulties experienced by students in the interpretation of the solutions of ordinary differential equations that models a problem

Guerrero Ortiz, Carolina[1]; **Camacho Machín, Matías**[2] y **Mejía Velasco, Hugo Rogelio**[1]
[1] Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV
[2] Didáctica de la Matemática, Departamento de Análisis Matemático. Universidad de la Laguna
cguerrero@cinvestav.mx
mcamacho@ull.es
hmejia@cinvestav.mx

Summary

The main aim of this work is, on the one hand, to discover and classify the difficulties students face when solving tasks that model a given phenomenon, and, on the other hand, to study the role played by the graphical register in creating these difficulties when interpreting the solutions and direction fields of Ordinary Differential Equations (ODE). In particular, we ask ourselves the following questions: What previous knowledge of Differential Calculus do students use when plotting direction fields? How do students interpret the solutions to an ODE when this is presented in graphical form? Is there any difference in their interpretation when the solution is expressed in algebraic form? What role might a specific type of software play in the interpretation students make?

In our study we use the theoretical framework proposed in the Semiotic Logical Approach (SLA), especially the interpretation and correlations between difficulties, errors and obstacles as proposed by Socas (2007). This allows us to establish a classification of the difficulties student face and then lay the foundations so that a teaching sequence can be carried out.

The study was carried out with 14 students in the second semester of their Computational Systems Engineering course who voluntarily agreed to take part in five additional sessions in their Differential Equations module. To this end a computer application was designed and analysis was made of the solution process students follow when solving tasks related to the description of solution behaviour for an ODE that models the variation of a fish population in a lake over a period of time. The students previously answered two questionnaires which were used to analyze their basic knowledge of Differential Calculus needed to work with an ODE.

Among the results of our research we found that, generally speaking, students have an idea of what a differential equation is and its solution or solutions. We could also see a certain level of skill in their algebraic solutions of elemental equations. With regard to their knowledge of direction fields, when asked the question *What is a direction field?* only 6 students were able to give answers that were connected to the solution curves for an ODE. This latter fact confirms that students have only slight mastery of the geometrical approach. In this sense, when the students worked with a problem where they were asked to draw a direction field associated with the differential equation $\frac{dN}{dT} = f(N)$, $f(N)$ being a function represented graphically, only half of the students taking part in our study could give an answer. In general the direction field they plot was made up of traces of curves similar to the function $f(N)$ translated vertically. However, when the students were asked to trace a solution curve with initial conditions and to describe the behaviour of the population they again reproduced a curve similar to the original $f(N)$. In other words, the students considered the curve $f(N)$ as the solution to a differential equation.

Moreover, when we studied the interpretation students make of the algebraic solution for the ODE and the interpretation of the solution curves for the same equation, especially the equation $y' = 7y - 3y^2 - 2$, the algebraic solution of which is

$$y(t) = \frac{2(1 - 3y_0) - e^{-5t}(2 - y_0)}{1 - 3y_0 - 3e^{-5t}(2 - y_0)}$$

we found that, generally speaking, even when students mastered some algebraic tools for solving an ODE, they failed to use these tools when interpreting the behaviour of the solutions in the graphical register. Also, when working with the direction field in order to obtain information about the solutions for the ODE, students' use was only local, that is, they focused on relatively small regions of the direction field.

From our research we can conclude, among other things, that students face various difficulties that limit their understanding and interpretation of the solutions in different registers of semiotic representation. We could find evidence of difficulties arising from the incorrect way of understanding the basic concepts of Differential Calculus. We could also see that students find graphical and dynamic representation of the solutions more meaningful as the dynamic properties allow students to interpret and recover information based on study of the direction field.

In future research we will try to find performance strategies that ease transition between registers and contextual interpretation of the information in each register. In this respect we will have to develop activities that emphasize identification of the parameters and their influence on the solution or on the differential equation itself. Technological tools could help this work to be undertaken in a better way. In this sense, activities that lead to a differential equation through modelling of known phenomena can help students to relate meaningfully the parameters of the equation to various properties of the phenomenon.