https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2418
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Contextualización en matemáticas: uso del teorema del ángulo inscrito en la geometrización de la percepción visual

Contextualization in mathematics: use of the inscribed angle theorem in the geometrization of visual perception

Lianggi Espinoza Ramírez
Universidad de Valparaíso, Chile
lianggi.espinoza@uv.cl

Andrea Stephanie Vergara Gómez
Universidad Academia de Humanismo Cristiano, Chile
asvergarag@docentes.academia.cl

David Valenzuela Zúñiga
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
david.valenzuela.z@gmail.com

RESUMEN • La contextualización en matemáticas adquiere relevancia debido al interés actual en que los estudiantes puedan usar lo que aprenden en la escuela para explicar fenómenos de la realidad. Por ello, el propósito de esta investigación es caracterizar las dificultades que surgen cuando estudiantes de secundaria abordan un problema del mundo real en el ámbito de la percepción visual. El método empleado corresponde a una ingeniería didáctica, mediante la cual se confrontan una indagación histórico-epistemológica de la *Óptica de Euclides* y las respuestas de los estudiantes, al abordar un problema diseñado sobre la base de dicha indagación. Los resultados revelan dificultades tanto en la tendencia que manifiestan los estudiantes a justificar sus respuestas desde el ámbito del fenómeno estudiado, como en las restricciones que genera el tratamiento escolar del teorema del ángulo inscrito.

PALABRAS CLAVE: Análisis histórico; *Óptica de Euclides*; Teorema del ángulo inscrito; Estudio del cambio; Problemas del mundo real.

ABSTRACT • Contextualization in mathematics is relevant due to the current aim that students can use what they learn in school to explain phenomena of reality. Therefore, the purpose of this research is to characterize the difficulties that arise when students from high school address a real-world problem in the field of visual perception. The method used corresponds to didactic engineering, which is done by confronting historical-epistemological research on *Euclid's Optics* and the students' answers when dealing with a problem that is designed on the basis of such study. The results revealed difficulties, both in the tendency that students show when justifying their answers about the studied phenomenon and the restrictions caused by the approach of the angle inscribed theorem.

KEYWORDS: Historical analysis; *Euclid's Optics*; Inscribed angle theorem; Study of change; Real-world problems.

Recepción: julio 2017 • Aceptación: septiembre 2019 • Publicación: marzo 2020

Espinoza Ramírez, L., Vergara Gómez, A. S. y Valenzuela Zúñiga, D. (2020). Contextualización en matemáticas: uso del teorema del ángulo inscrito en la geometrización de la percepción visual. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(1), 5-26.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2418

INTRODUCCIÓN

Las reformas educativas contemporáneas han enfatizado la necesidad de propiciar que los estudiantes vinculen las matemáticas que aprenden en la escuela con el mundo en el que viven. Se espera que estos puedan formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, usarlas para describir, explicar y predecir fenómenos, así como reconocer el papel que desempeñan en el mundo (OECD, 2016). A su vez, en las últimas décadas, diversas perspectivas teóricas han abordado la enseñanza de las matemáticas a través de problemas del mundo real; ejemplo de ello son la educación matemática realista (Bray y Tangney, 2016), la enseñanza mediante la resolución de problemas (Jurdak, 2016), la modelación en matemáticas (Stillman, Blum y Biembengut, 2015), la semiótica social (DeJarnette y González, 2016) y la construcción social e histórica del conocimiento matemático (Espinoza, Vergara y Valenzuela, 2017; Bartolini-Bussi, Taimina e Isoda, 2010; Cantoral, 2013; Montiel y Jácome, 2014).

Espinoza, Vergara y Valenzuela (2017) señalan que, en el ámbito de la geometría escolar, a pesar de que los libros escolares actuales incluyen referencias a problemas del mundo real, no se logran vínculos significativos con los contextos de uso del conocimiento. En efecto, estas actividades contextualizadas tienden a forzar la realidad para adaptarla a la matemática escolar, o bien presentan situaciones que se distancian de los contenidos escolares. También, Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015) sostienen que la matemática escolar, a pesar de evocar situaciones realistas, se presenta sin un vínculo significativo con la vida cotidiana. De modo similar, tanto Montiel y Jácome (2014), como DeJarnette y González (2016), plantean la necesidad de que, en la escuela, más que incluir problemas matemáticos adaptados a situaciones reales, se trabaje con problemas del mundo real. Al respecto, tanto Cantoral (2013) como Bartolini-Bussi et al. (2010) articulan perspectivas histórico-culturales con la resolución de problemas del mundo real. En la presente investigación realizamos esta articulación para el caso específico del uso el teorema del ángulo inscrito en el estudio geométrico de la percepción visual (figura 1).

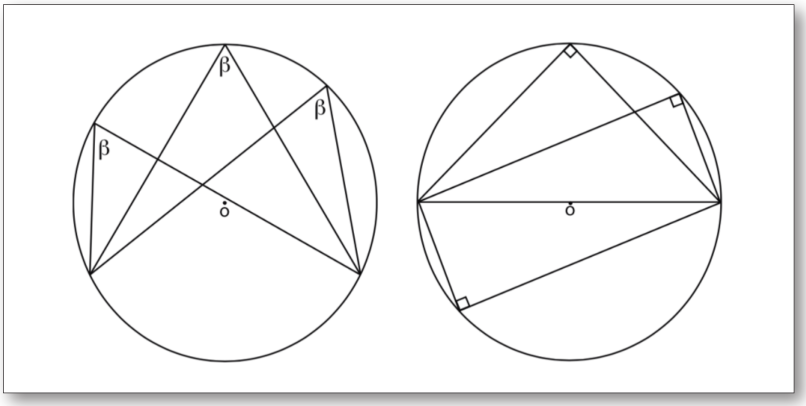

Fig. 1. Representación geométrica para el ángulo inscrito y su caso particular del ángulo inscrito en la semicircunferencia, donde O es el centro de la circunferencia.

Escogimos este teorema tanto por la importancia que tiene en el currículum, como por la carencia de problemas contextualizados que requieran su aplicación en libros de texto de uso oficial en Chile (Muñoz, Rupin y Jiménez, 2015; Zañartu, Darrigrandi y Ramos, 2012). Con respecto a investigaciones en las que se analiza este teorema, Corica y Marín (2014) lo emplean para dotar de significados a la circunferencia por medio del examen de las propiedades y relaciones de cuadriláteros cíclicos. Moore (2013) evidencia cómo, mediante una intervención didáctica, los estudiantes lograron progresivamente comprender las relaciones multiplicativas entre un arco subtendido, la circunferencia de un círculo y el radio de un círculo. En la literatura no encontramos investigaciones que analicen el teorema del ángulo inscrito vinculado a contextos de uso. Solo hallamos el diseño didáctico de Bagazgoitia (2003), en el cual se propone analizar el ángulo máximo de visualización hacia una portería en el contexto de un partido de rugby, así como el estudio de Artigue y Robinet (1982), en el que señalan que, en solo una de las once definiciones que encontraron en textos didácticos y disciplinares, la circunferencia es caracterizada de manera dinámica.

En esta investigación se plantea una articulación entre un enfoque histórico-cultural y la resolución de problemas del mundo real. Dada la necesidad de comprender cómo los estudiantes abordan problemas del mundo real en la escuela, planteamos como objetivo de investigación caracterizar dificultades que surgen cuando estudiantes de secundaria abordan un problema de geometría contextualizado en el ámbito de la percepción visual. Dicho problema fue diseñado sobre la base de una indagación histórico-epistemológica de la *Óptica de Euclides* y conlleva el uso del teorema del ángulo inscrito.

MARCO TEÓRICO

En la teoría socioepistemológica de la matemática educativa (Cantoral, 2013) se plantea que la enseñanza de la matemática debe situarse en la experiencia social del aprendiz, la cual no se concibe acotada a la vivencia personal de individuos, sino que incorpora además las de los seres humanos como colectivo, como sociedades y como humanidad (Cantoral et al., 2015). A su vez, en esta investigación se entiende por mundo real «todo lo que tenga que ver con naturaleza, sociedad o cultura, incluyendo tanto lo referente a la vida cotidiana como a los temas escolares [...] diferentes de las matemáticas» (Alsina, 2007, p. 87).

Dado lo anterior, consideramos como *contextualización en matemáticas* a la acción de incorporar en la enseñanza *contextos de uso* del conocimiento, ligados al mundo real del aprendiz, que al mismo tiempo hayan sido fundamentales para la humanidad, esto es, que se hayan desarrollado en distintos periodos históricos y entornos culturales. A estos los denominamos *problemas del mundo real con sustento histórico-cultural*.

Desde la perspectiva de Freudenthal (2002), nos referimos a problemas en los que existan vínculos significativos entre sus fenomenologías didáctica e histórica. Ahora bien, Freudenthal (2002), al plantear que la enseñanza de la matemática debe situarse en contextos o situaciones realistas, considera que un *fenómeno* puede provenir tanto del mundo real como de las matemáticas, refiriéndose de manera amplia a dominios de actividad en los cuales se revela al estudiante algún aspecto que debe ser matematizado. Desde nuestra perspectiva, al referirnos a *contextos de uso*, hacemos referencia específica a la incorporación a la escuela de ámbitos de uso del conocimiento que provengan del mundo real del aprendiz (Montiel y Jácome, 2014; DeJarnette y González, 2016).

De esta manera, diferenciamos nuestra postura de contextualización en matemática de la contextualización simulada, la cual entendemos como aquella que evoca situaciones realistas de manera artificial, al incluir contextos inadecuados, inventados, manipulados, lejanos o falseados (Alsina, 2007), además de no tomar en cuenta las características específicas del conocimiento puesto en uso en tales situaciones (Montiel y Jácome, 2014; Arrieta y Díaz, 2015). A su vez, desde nuestro posicionamiento, estos *contextos de uso* no solo deben ser parte del mundo real del aprendiz, sino que además deben haber sido significativos para la humanidad, es decir, que se hayan desarrollado en distintos periodos históricos y entornos culturales.

En la teoría socioepistemológica se entiende la contextualización como algo inherente a la epistemología del conocimiento matemático. En efecto, el significado no se ve como un atributo del objeto, sino que deviene «del uso situado que se dé a este y a sus procesos asociados a través de la actividad práctica donde el niño, el joven o el adulto dotan de significación relativa, situada y contextualizada a los objetos formales» (Cantoral et al., 2015, p. 16). Considerando lo anterior, se entiende por significación el proceso de apropiación progresiva de significado situado en contextos específicos (Espinoza, 2009).

Asimismo, la contextualización se expresa, particularmente, en dos de los principios de esta teoría: la *racionalidad contextualizada* y el *relativismo epistemológico*. El primer principio pone en cuestionamiento la concepción universalista de la racionalidad, al buscar entender los elementos normativos del razonamiento en los contextos específicos en los que se realiza una inferencia (Cantoral, 2013). De esta manera, la racionalidad contextualizada determina cierta *manera de ver* el conocimiento, la cual es situada en contextos específicos (Espinoza, 2009). A su vez, el segundo principio cuestiona la concepción universalista de la epistemología al plantear que la validez del saber es relativa a los individuos o grupos humanos (Cantoral, 2013). De este modo:

> el contexto determinará el tipo de racionalidad con la cual un individuo o grupo –como miembro de una cultura– construye conocimiento en tanto lo signifique y ponga en uso (*principio de racionalidad contextualizada*). Una vez que este conocimiento es puesto en uso, es decir, se consolida como un saber, su validez será relativa al individuo o al grupo, ya que de ellos emergió su construcción y sus respectivas argumentaciones, lo cual dota a ese saber de un *relativismo epistemológico* (Cantoral *et al.*, 2015, p. 16).

De esta manera, concebimos el saber como «el resultado de la interacción entre un mundo cognoscible e individuos cognoscentes, a los cuales este mundo les causa asombro y los interpela a la explicación» (Espinoza, Vergara y Valenzuela, 2018, pp. 251-252). Por tanto, el saber matemático no se entiende como un conocimiento separado e independiente de toda experiencia, más bien, en el ámbito de la sabiduría humana, se concibe «lleno de» y «en» experiencia (Espinoza, 2014). En consecuencia, siguiendo el principio del *relativismo epistemológico*, se asume que los conocimientos que surgen como resultado de la interacción del ser humano con un fenómeno específico están caracterizados y significados por los aspectos propios de dicho fenómeno (Cantoral, 2013).

Con relación a la enseñanza, Espinoza, Vergara y Valenzuela (2017) plantean que, para superar la mera evocación de situaciones realistas por verdaderos procesos de contextualización del conocimiento, se requiere considerar la *racionalidad contextualizada* subyacente a los contextos de uso del conocimiento. Así, desde nuestra perspectiva, los problemas matemáticos contextualizados requieren:

- Incorporar un contexto de uso real que haya sido utilizado por la humanidad en distintos periodos históricos y entornos culturales.
- Considerar la racionalidad subyacente al contexto de uso del conocimiento.
- Proveer preguntas que sean sólidas en términos epistémicos, es decir, que consideren las características específicas del conocimiento puesto en uso.

Espinoza, Vergara y Valenzuela (2017) analizaron aspectos de la *racionalidad contextualizada* de la *Óptica de Euclides*, en la que se estudia geométricamente la percepción visual. Estos autores concluyeron que la geometría de esta obra se caracteriza por tener un *carácter dinámico*, determinado por el fenómeno de la percepción visual y por su *heurística comparativa*, esto es, la generación de un sistema de explicación del fenómeno a partir de analizar el cambio mediante la comparación de dos o más magnitudes. Esta *racionalidad contextualizada*, señalan, se confronta con el carácter estático y la predominancia del cálculo de la geometría escolar (figura 2). Por tanto, en el diseño de problemas escolares que tienen como propósito el estudio geométrico de la percepción visual, se requiere generar una ruptura con la racionalidad subyacente a la geometría escolar, al permear el diseño con el carácter *dinámico-comparativo* de la *Óptica de Euclides*.

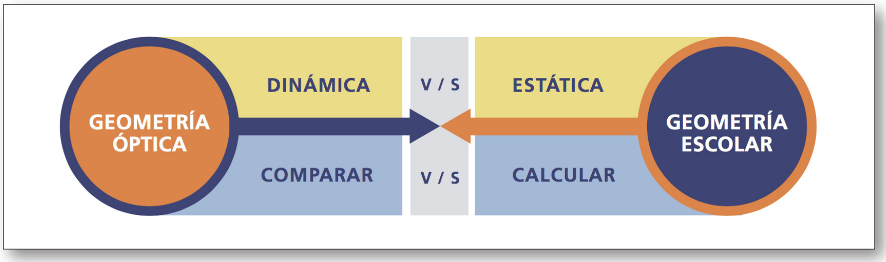

Fig. 2. Confrontación entre las racionalidades subyacentes a la geometría de la *Óptica de Euclides* y a la geometría escolar, en Espinoza, Vergara y Valenzuela (2017, p. 32).

En efecto, Espinoza, Vergara y Valenzuela (2017) señalan que traer a escena la racionalidad subyacente del conocimiento en uso «implica un desafío epistemológico, pues demanda cuestionar la racionalidad imperante en el discurso matemático escolar» (p. 32). Al respecto, Soto y Cantoral (2014) conciben el *discurso matemático escolar* como un sistema de razón que provee una *manera de ver* la matemática escolar en la cual se concibe el conocimiento como objetos preexistentes y acabados, con un carácter utilitario, donde se soslayan aspectos sociales, contextuales y culturales del conocimiento y su uso en distintos ámbitos de la experiencia humana. Este discurso, señalan los autores, delinea ciertas formas de actuar, razonar, significar y/o argumentar, excluyendo otras, de manera que ejerce violencia simbólica y genera procesos de exclusión.

Dado lo anterior, surge el interés por estudiar aquellos significados que han antecedido y acompañado la constitución del saber matemático que actualmente se encuentran perdidos, simplificados o invisibilizados en la matemática escolar, analizando así su posible incorporación al aula (Espinoza, Vergara y Valenzuela, 2018). Cantoral (2013) señala que esto se puede hacer problematizando el saber a través de la historización. Al historizar, se ubica el saber en el tiempo y el espacio, se explora desde la óptica de quien lo inventa, lo aprende o lo usa, desde una perspectiva histórica, cultural e institucional (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). En esta historización, interesa estudiar al saber matemático considerando sus momentos germinales, su desarrollo en el tiempo y su transversalidad en diversas prácticas humanas (Espinoza, Vergara y Valenzuela, 2018).

MÉTODO

En esta investigación, implementamos como método una *ingeniería didáctica*. Si bien la ingeniería didáctica permite la producción de situaciones de enseñanza basadas en un trabajo investigativo, también es un método de investigación (Artigue, 1995). Considerando lo segundo, la ingeniería didáctica se ubica «en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori*» (p. 37). Cabe señalar que los objetivos de investigación de una ingeniería didáctica pueden ser diversos (Douady, 1987, en Artigue, 1995). En efecto, «la ingeniería didáctica es singular no por los objetivos de las investigaciones que entran en sus límites, sino por las características de su funcionamiento metodológico» (Artigue, 2005, p. 38).

En la teoría socioepistemológica, las ingenierías didácticas suelen ser utilizadas en investigaciones en las que se diseñan problemas contextualizados sobre la base de indagaciones de corte histórico-epistemológico (Cantoral, 2013). En esta investigación, la utilizamos para realizar una confrontación entre una indagación histórico-epistemológica de la *Óptica de Euclides* y las respuestas de los estudiantes al abordar un problema diseñado sobre la base de dicha indagación, con el propósito de caracterizar eventuales dificultades que puedan surgir en este proceso.

La ingeniería didáctica diseñada está compuesta por cuatro fases, a saber: 1) un *análisis preliminar y a priori*, en el que primeramente se problematiza el saber a través de su historización, luego se determinan los significados geométricos que se han de trabajar con los estudiantes y finalmente se diseña un problema contextualizado; 2) una *experimentación*, que consiste en la aplicación del problema a los estudiantes; 3) un *análisis a posteriori*, en el cual se analizan las respuestas recurrentes de los estudiantes; y 4) una *confrontación*, en la que se contrastan los resultados del *análisis a posteriori* y del *análisis preliminar* y *a priori* (figura 3).

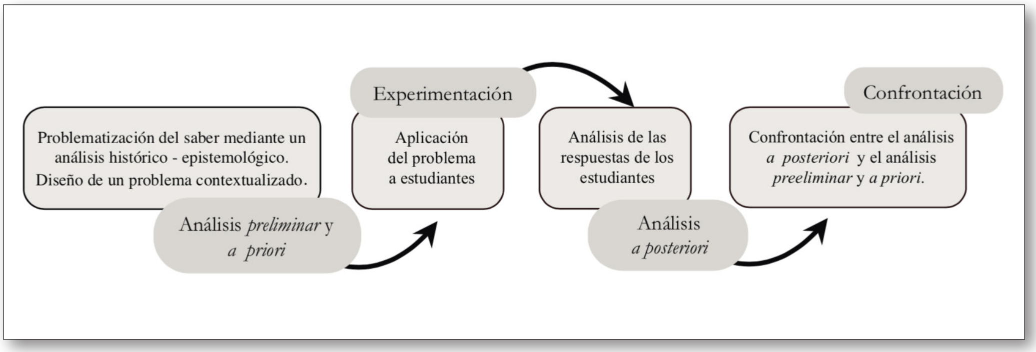

Fig. 3. Esquema de las fases de la ingeniería didáctica usada en esta investigación.

En el *análisis preliminar y a priori*, realizamos una indagación histórico-epistemológica de secciones de la *Óptica de Euclides* y los *Elementos* de Euclides. Escogimos estas obras dado que en ellas aparece el teorema del ángulo inscrito, tanto en su contexto de uso como en su formulación matemática. Estudiamos las obras siguiendo el método de análisis de contenido (Drisko y Maschi, 2016) y las sugerencias para el estudio de obras antiguas de Espinoza (2009), quien propone considerar el contexto específico de producción de las obras, las prácticas con las que están vinculadas y el escenario sociocultural en el que fueron gestadas. Primero, estudiamos todas las proposiciones de la *Óptica de Euclides* y seleccionamos aquellas donde se utiliza el teorema del ángulo inscrito (proposiciones 34 a 49). Después, analizamos todas las referencias que hacen estas proposiciones a los *Elementos* de Euclides. De manera simultánea, analizamos el libro 3 de los *Elementos*. Finalmente, agrupamos las proposiciones de la *Óptica de Euclides* en función del análisis del fenómeno que se realiza en cada una de ellas.

Sobre la base de los resultados de esta indagación histórico-epistemológica, se determinaron los significados geométricos específicos que serían promovidos en el trabajo con los estudiantes, seguido de lo cual se diseñó un problema contextualizado. Como parte del problema, se generaron preguntas capaces de propiciar un ambiente adidáctico, de acuerdo con lo señalado por Brousseau (2007). En primer lugar, a modo de pilotaje, realizamos una puesta en escena del problema en un curso de 35 estudiantes de tercer nivel de enseñanza media chilena (16 años), con la finalidad de mejorar o ajustar las preguntas planteadas. Después, aplicamos el problema en 8 cursos pertenecientes a escuelas ubicadas en diferentes ciudades de la zona central y norte de Chile (véase tabla 1). Las edades de los estudiantes fluctuaron entre los 15 y 17 años.

Tabla 1.
Codificación y nivel educativo
de los cursos en los que se aplicó el problema

Curso	*Nivel educativo*
C1	4.º medio
C2	4.º medio
C3	4.º medio
C4	3.º medio
C5	3.º medio
C6	3.º medio
C7	2.º medio
C8	2.º medio

En relación con el tratamiento previo del teorema, los profesores de todos los cursos señalaron que enseñaron el teorema del ángulo inscrito para el caso de la semicircunferencia. Los profesores de los cursos C1, C4, C5, C6, C7 y C8 señalaron que enseñaban el teorema del ángulo inscrito de manera implícita al enseñar el teorema del ángulo central. Solamente los profesores de los cursos C2 y C3 señalaron enseñarlo de manera independiente al teorema del ángulo central. A su vez, todos los profesores señalaron enseñar el teorema de manera procedimental. Por último, ninguno señaló que incluyera en sus clases aplicaciones del teorema del ángulo inscrito en problemas del mundo real.

En la *experimentación*, el problema fue aplicado por los profesores de cada curso, quienes se encontraban participando en un curso de profesionalización docente. Estos profesores fueron capacitados para aplicar el problema y registrar las producciones de los estudiantes. Además, les indicamos que, en la interacción con sus estudiantes durante el desarrollo del problema, pusieran en práctica procesos de devolución (Brousseau, 2007). Con respecto a la recogida de datos, cada profesor elaboró un informe escrito, de carácter cualitativo, en el que describió los distintos tipos de respuestas que proporcionaron sus estudiantes al abordar el problema. Esto se realizó considerando tanto los momentos de trabajo individual, como los de puesta en común. Estos momentos corresponden a las fases didácticas de formulación y validación según Brousseau (2007). Junto con lo anterior, los profesores anexaron a los informes registros fotográficos de las producciones de los estudiantes.

En el *análisis a posteriori*, estudiamos las respuestas de los estudiantes siguiendo el criterio de recurrencias del análisis temático (Owen, 1984). Entendemos por respuestas recurrentes aquellas cuyos significados subyacentes coincidieron en dos o más cursos, considerando incluso si las palabras o representaciones usadas no son exactamente las mismas. De esta manera, la recurrencia fue usada como un criterio para seleccionar y agrupar producciones de estudiantes. Para realizar esto, primero codificamos las respuestas reportadas en los informes de los profesores. Después, se identificaron cualitativamente las respuestas recurrentes entre los cursos estudiados. La frecuencia de aparición de estas respuestas se cuantificó, no en cada curso, sino entre los 8 cursos estudiados. Esto se hizo con el propósito de lograr que las dificultades identificadas en esta investigación surgieran del análisis de producciones de estudiantes de distintas escuelas, ubicadas en diferentes regiones de Chile. Finalmente, seleccionamos las respuestas recurrentes que se presentaron en cuatro o más cursos. Estas son descritas en la sección de «Análisis a posteriori» de este artículo.

Por último, en la *confrontación* se contrastaron los resultados del *análisis a posteriori* con los *análisis preliminar* y *a priori*, mediante lo cual identificamos y caracterizamos dos dificultades que surgieron en el proceso de resolución de los estudiantes ante el problema propuesto. Esto se hizo contrastando los significados evocados por los estudiantes en las respuestas recurrentes con los significados identificados en el análisis de las proposiciones de la *Óptica de Euclides*, sobre la base de los cuales diseñamos el problema aplicado a los estudiantes. A continuación, presentamos los resultados de la investigación.

ANÁLISIS PRELIMINAR Y *A PRIORI*: ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO

La *Óptica de Euclides*, datada en el siglo III antes de Cristo, es el tratado más antiguo sobre percepción visual que ha llegado a nuestros días. En esta obra, la percepción visual es representada geométricamente a través de rayos visuales que salen del ojo y llegan a los objetos vistos. Euclides representa el ojo como un punto y las magnitudes vistas como segmentos, a los cuales llama rectas. Por tanto, la magnitud aparente de los objetos vistos por el ojo estará determinada por el ángulo formado por los dos rayos visuales que llegan a los extremos de la magnitud vista (figura 4).

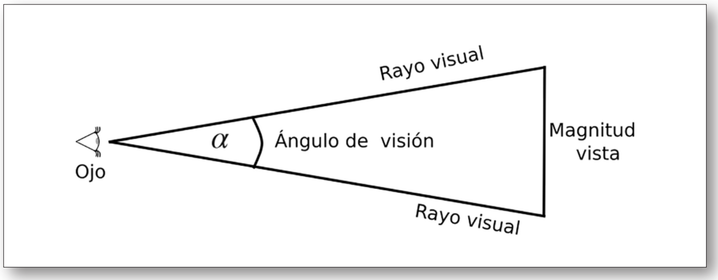

Fig. 4. Geometrización de la percepción visual en la *Óptica de Euclides*.

En la obra se observa una tendencia a analizar los problemas en el plano. A su vez, la percepción visual es analizada a través del método de la comparación; así, dadas dos magnitudes, si se tiene un ángulo de visión mayor, igual o menor que el otro, se tendrá que el objeto parecerá más grande, igual o menor, respectivamente. Además, al geometrizar la percepción visual, Euclides no considera lo referente al efecto de relieve, color, sombra, grosor u otras variables involucradas.

Entre las proposiciones 34 y 47 de la *Óptica de Euclides* aparece, en uso, el teorema del ángulo inscrito. Las proposiciones 34, 37, 39, 41, 45 y 47 presentan casos en los que se analiza la *conservación de la percepción visual*. En la proposición 37 se afirma: «Hay un lugar en el cual, si el ojo cambia de posición y el objeto visto permanece fijo, el objeto visto parece siempre igual» (Euclides, 2000, p. 177). El desarrollo de esta proposición es el siguiente (figura 5):

> Sea BC el objeto visto y sea Z el ojo a partir del cual incidan los rayos ZB, ZC y descríbase en torno al triángulo BZC un sector del círculo BZC, y cambie de posición el ojo Z hacia D e incidan ahora en cambio los rayos DB, DC. Por consiguiente, el ángulo D es igual a Z, puesto que ocupan el mismo segmento. Y los objetos vistos bajo ángulos iguales parecen iguales [Def. 4]. Luego, en cualquier caso, BC parecerá igual si el ojo cambia de posición sobre el arco de circunferencia BDC (Euclides, 2000, p. 177).

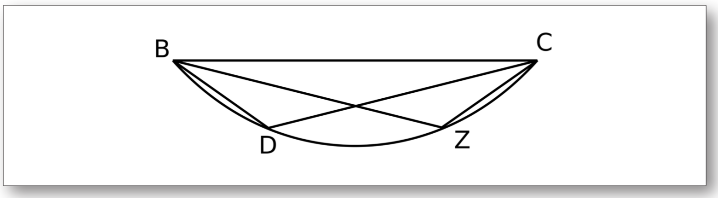

Fig. 5. Representación de la proposición 38 en la *Óptica de Euclides* (Euclides, 2000, p. 177), reconstruida con alfabeto latino.

En esta proposición, se afirma que el objeto parecerá igual si el ojo cambia de posición sobre el arco de circunferencia. La justificación de esta afirmación se encuentra en la proposición III-21 de los *Elementos*, en la cual se expone el teorema del ángulo inscrito: «Los ángulos, que están en un mismo segmento del círculo, son iguales entre sí» (Euclides, 1774, pp. 77-78). La demostración se hace para dos casos, uno donde el segmento del círculo definido por la cuerda es mayor que un semicírculo y otro donde es menor (figura 6). A su vez, la proposición III-31 de los *Elementos*, «en el círculo el ángulo, que está en el semicírculo, es recto; el que está en el segmento mayor es menor que el recto; y el que está en el segmento menor es mayor que el recto» (Euclides, 1774, pp. 84-85), permite caracterizar las medidas de los ángulos aludidos. De manera general, los ángulos inscritos juegan un rol protagónico en el libro III de los *Elementos* de Euclides, y son usados principalmente para caracterizar los segmentos del círculo en los que están inscritos.

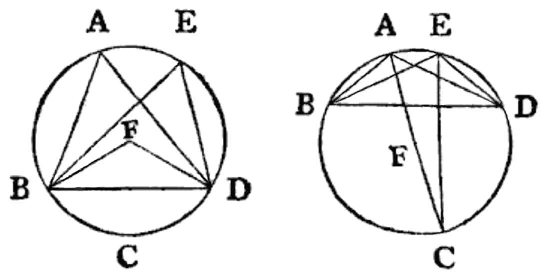

Fig. 6. Imágenes de la demostración de la proposición III-21 de los *Elementos* para los casos donde el arco involucrado es mayor y menor que el semicírculo, respectivamente (Euclides, 1774, p. 77).

De un modo similar, en las proposiciones 35, 36, 40, 42, 43, 44 y 46 de la *Óptica de Euclides* se analiza el *cambio de la percepción visual*. A modo de ejemplo, considérese la proposición 43. En ella se sostiene que, si el objeto visto permanece fijo y el ojo cambia de posición en una línea recta paralela a la magnitud vista, entonces el objeto visto parece a veces igual y a veces desigual. Sobre la base de la figura 7, Euclides representa AB como la magnitud vista y CD como la recta en la que se mueve el ojo. Euclides concluye que el ángulo visual mayor se tendrá cuando el ojo esté en Z, siendo E punto medio de AB y EZ perpendicular a AB. A su vez, afirma que cuando la posición del ojo se aleje de Z, la magnitud aparente irá disminuyendo, de manera simétrica, hacia su derecha y su izquierda (puntos C y D). En su justificación, Euclides señala que el ángulo AZB es igual al ángulo AHB, el cual, a su vez, es menor que el ángulo ADB. Nótese que al definir la primera igualdad se usa el teorema del ángulo inscrito.

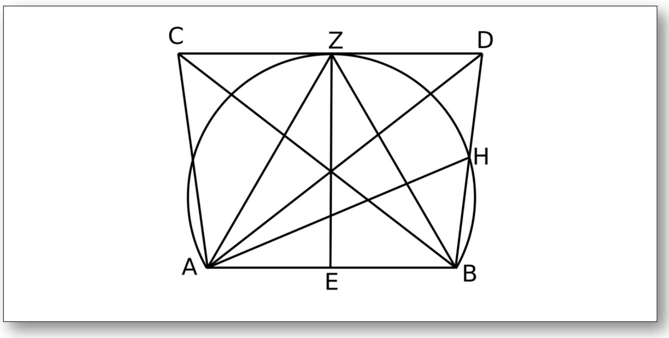

Fig. 7. Representación geométrica usada en la proposición 43 de la *Óptica de Euclides* (Euclides, 2000, p. 183), reconstruida con alfabeto latino.

Cabe subrayar que la justificación de la proposición es válida solo hasta el punto F, obtenido por la intersección de la prolongación de la recta CD y la recta tangente a la circunferencia en el punto B (figura 8). Ahora bien, en la medida en que el ojo se aleja del objeto visto, la variación del tamaño aparente es cada vez menos perceptible al ojo humano. Por tanto, y de acuerdo con el principio del *relativismo epistemológico*, interpretamos que Euclides justificó la proposición para una ubicación específica del ojo en cierta proximidad al objeto visto. En efecto, la justificación geométrica que da Euclides no es válida para cualquier distancia entre el ojo y el objeto. Es decir, su ámbito de validez está situado al fenómeno de la percepción visual.

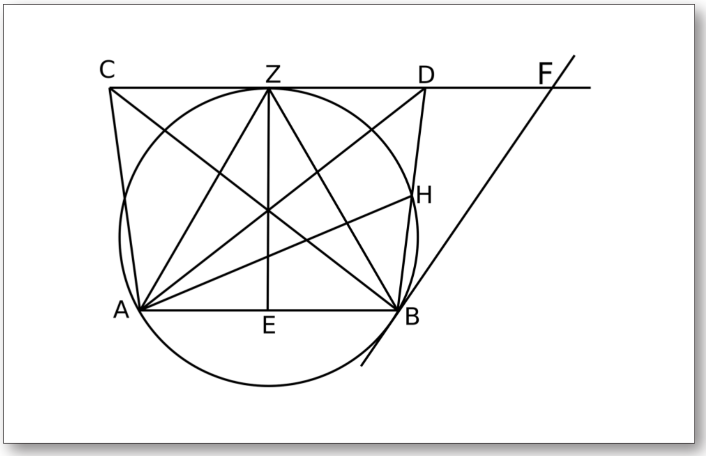

Fig. 8. Construcción de la tangente a la circunferencia AZB sobre el punto B, realizados en la representación geométrica utilizada en la proposición 43 de la *Óptica de Euclides* (adaptada de Euclides, 2000, p. 183).

En síntesis, la indagación histórico-epistemológica nos permitió desvelar que el teorema del ángulo inscrito se usa en la *Óptica de Euclides* tanto para el estudio de la conservación como para el del cambio de la percepción visual.

Sobre la base de esta indagación, determinamos los significados geométricos específicos que serían promovidos en el trabajo con los estudiantes y diseñamos el problema contextualizado. La estructura del diseño fue elaborada definiendo el tipo de actividades, las preguntas de introducción, los criterios de gestión del problema por parte del profesor y las posibles respuestas o reacciones de los estudiantes para cada una de las actividades. Por razones de extensión, el detalle de estos procedimientos no forma parte de este escrito. A continuación, se presenta un resumen de las actividades que se implementaron y las indicaciones que debían realizar los profesores.

EL PROBLEMA CONTEXTUALIZADO Y SU *EXPERIMENTACIÓN*

Para otorgar al problema la *racionalidad contextualizada* dinámico-comparativa subyacente a la *Óptica de Euclides*, seguimos las sugerencias de Espinoza, Vergara y Valenzuela (2017), quienes proponen incorporar preguntas del tipo «¿cómo varían?, ¿cuándo permanecen iguales?, ¿cuándo uno es más grande que el otro?, ¿cuándo es su mitad, doble o cuádruple?, etc.» (p. 33). A modo de introducción del problema, para proveer una aproximación vivencial e intuitiva al fenómeno y a su estudio geométrico, los profesores solicitaron a sus estudiantes tomar un lápiz en su mano y que, cerrando un ojo, movieran el lápiz hacia atrás y hacia adelante variando lo más posible la distancia del lápiz al ojo. Luego se les preguntó: si está más lejos ¿se ve más grande o más pequeño?, ¿y si está más cerca? (figura 9).

Fig. 9. Foto de uno de los profesores mientras ejemplifica el fenómeno de la percepción visual mediante la visualización de un lápiz.

Después, los profesores representaron geométricamente la situación planteada en el pizarrón, asociando el lápiz con el segmento fijo AB y el ojo con los puntos E y F, respectivamente (figura 10).

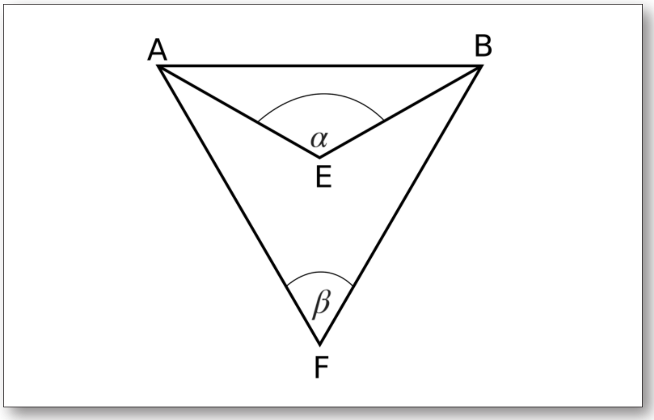

Fig. 10. Descripción de la variación del ángulo en función de la distancia de la magnitud vista al ojo.

Luego, los profesores entregaron a los estudiantes una hoja en la que había un segmento AB y un punto E, tal como se indica en la figura 11. A su vez, les dieron la instrucción de dibujar dos puntos en los que la magnitud AB se viera más grande y más pequeña, respectivamente, en comparación con el punto B. Esto se hizo con el fin de corroborar que los estudiantes habían entendido la explicación de la representación geométrica de la percepción visual realizada por el profesor en el pizarrón.

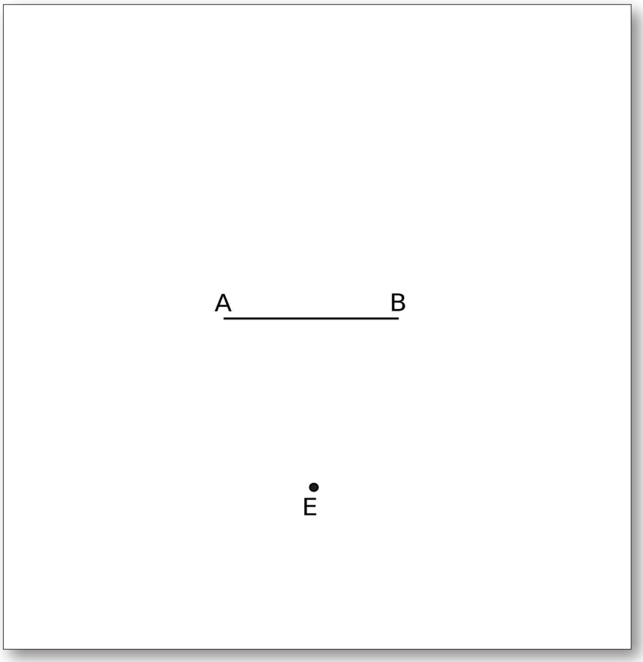

Fig. 11. Imagen de apoyo utilizada en el problema planteado.

A continuación, los profesores entregaron a los estudiantes el problema, que debía resolverse usando la figura 11. El problema estaba compuesto por las siguientes actividades:

> Actividad 1: Encuentra un punto en el plano donde el segmento AB se verá del mismo tamaño que lo que se ve del punto E.
> Actividad 2: ¿Puedes encontrar otros puntos?
> Actividad 3: ¿Cuántos son todos los puntos que puedes encontrar y dónde están?

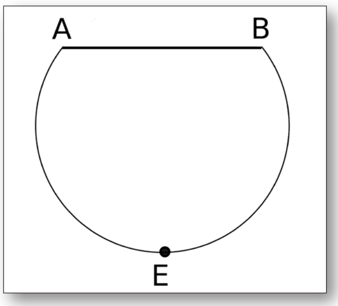

Fig. 12. Respuesta geométrica de la actividad 3.

Estas preguntas se diseñaron teniendo en cuenta las características del conocimiento puesto en uso, considerando como referencia el análisis realizado de las proposiciones de la *Óptica de Euclides*. La respuesta geométrica para la actividad 3 se encuentra al aplicar el teorema del ángulo inscrito (figura 12).

ANÁLISIS A POSTERIORI Y *CONFRONTACIÓN*

En el análisis de los datos, las respuestas recurrentes fueron consideradas como aquellas cuyos significados subyacentes coinciden en dos o más cursos. Entre los ocho cursos estudiados, identificamos tres respuestas que se encontraron en cuatro o más cursos. Estas respuestas fueron tipificadas de la siguiente manera:

- *Punto simétrico (RR1)*: Hace alusión al punto simétrico de E, tomando como eje de simetría el segmento AB (figura 11).
- *Movimiento paralelo a la magnitud vista (RR2)*: Hace alusión a la descripción de segmentos o conjuntos de puntos, ubicados de manera paralela a la magnitud vista, moviendo el ojo de manera próxima a la ubicación del punto E.
- *Ángulo inscrito en la semicircunferencia (RR3)*: Hace alusión al caso particular del ángulo inscrito para el caso de la semicircunferencia (figura 11).

En la tabla 2 presentamos una descripción de la recurrencia de estas respuestas en cada uno de los 8 cursos.

Tabla 2.
Respuestas recurrentes en cada uno de los cursos

Curso	*Tipificación de las respuestas recurrentes*		
	Punto simétrico (RR1)	Movimiento paralelo a la magnitud vista (RR2)	Ángulo inscrito en la semicircunferencia (RR3)
C1	x	x	
C2	x	x	x
C3	x	x	x
C4	x		x
C5	x	x	x
C6	x		x
C7	x	x	
C8	x	x	x

La *confrontación* de estos resultados con los del *análisis preliminar* y *a priori* nos permitió caracterizar dos dificultades que surgieron entre los distintos cursos al abordar el problema contextualizado. En efecto, en el proceso de resolución que realizaron los estudiantes de los ocho cursos estudiados, se manifestó la tendencia a: 1) justificar sus respuestas desde el ámbito del fenómeno involucrado, y 2) usar en sus respuestas el teorema del ángulo inscrito solo para el caso particular de la semicircunferencia. A continuación, presentamos estos resultados.

Los estudiantes tendieron a justificar sus respuestas desde el ámbito del fenómeno involucrado

Los profesores reportaron que sus estudiantes respondieron sin mayores inconvenientes a la actividad 1 construyendo un *punto simétrico (RR1)* al punto E, considerando el segmento AB como eje de simetría. A su vez, una respuesta recurrente encontrada en 6 de los 8 cursos, asociada a las actividades 2 y 3, fue la de manifestar que el tamaño aparente se mantiene si el ojo tiene un *movimiento paralelo a la magnitud vista (RR2)*. En las respuestas se hallaron dibujos tanto de rectas continuas como de puntos dispuestos en línea recta, por los que se mueve el ojo de manera próxima a la ubicación del punto E (figura 13).

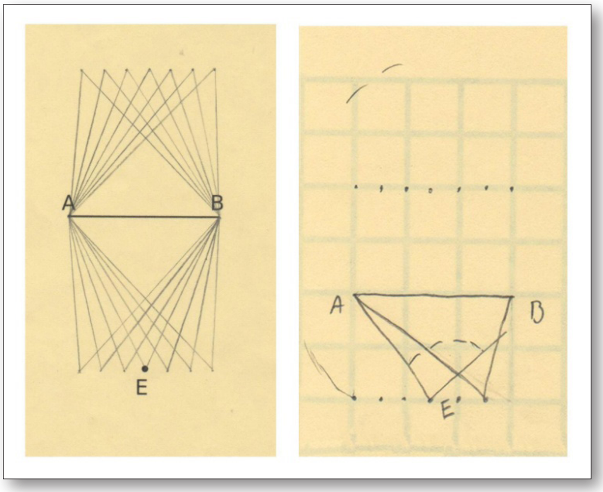

Fig. 13. Producciones de estudiantes correspondientes a RR2, reportadas en los cursos C6 y C2, respectivamente.

El estudiante de C2 acompañó su respuesta con la siguiente explicación: «Al trazar una línea horizontal por la que pase el punto E, paralelo al objeto, los ángulos inscritos en ella respecto al objeto serán iguales».

Esta respuesta contrasta con la esperada al problema (figura 12), así como con la proposición 43 de la *Óptica de Euclides*, que señala que, si el ojo se mueve en línea recta a la magnitud vista, el ángulo que representa la magnitud aparente cambia (figura 7). Al analizar las justificaciones de los estudiantes reportadas por los profesores ante estas respuestas, encontramos argumentaciones basadas en el ámbito del fenómeno involucrado. Considérese como ejemplo la siguiente justificación de un alumno del curso C1: «Si me alejo un poco del objeto, el ángulo de visión deberá variar en un par de grados, lo cual no basta para cambiar la percepción del objeto».

Al mover el ojo en línea recta, de manera paralela a un lápiz ubicado a aproximadamente 30 centímetros del ojo, la variación de la percepción visual del objeto, que es aproximadamente de medio grado, es difícilmente perceptible por el ojo humano. Teniendo en cuenta el *relativismo epistemológico*, sostenemos que la respuesta al problema de un segmento paralelo a la magnitud vista es correcta considerando como ámbito de justificación el fenómeno analizado. Esto se evidenció en la justificación de un alumno del curso C8, que señaló lo siguiente (figura 14): «Si se mueve solo un poco al lado se ve igual, pero si se mueve mucho cambia el tamaño».

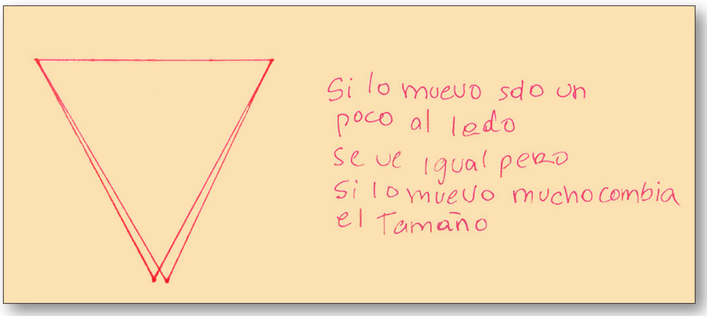

Fig. 14. Producción de un estudiante del curso C8.

De esta manera, identificamos que, a pesar de que el problema se diseñó e implementó para que los estudiantes lo resolvieran desde el ámbito de la geometría escolar, se evidenció en estudiantes de distintos cursos la tendencia a analizar el problema desde el ámbito del fenómeno involucrado. El primer ámbito está en el dominio de los objetos geométricos y sus propiedades, mientras que el segundo está en el terreno de la experiencia física con el fenómeno. Teniendo en cuenta el principio del *relativismo epistemológico*, sostenemos que la validez de las respuestas de los estudiantes depende del ámbito desde el cual se está pensando la resolución del problema propuesto. Por lo tanto, consideramos la respuesta del segmento paralelo a la magnitud vista como una respuesta correcta, estando situada su justificación en el ámbito del fenómeno de la percepción visual.

Este carácter situado de las justificaciones al ámbito del fenómeno involucrado también se evidenció en la *Óptica de Euclides*. En efecto, como se evidenció en el *análisis preliminar*, la justificación geométrica de la proposición 43 de esta obra no es válida para una distancia cualquiera entre el ojo y el objeto visto, sino que lo es solamente para cierta proximidad del ojo al objeto (figura 8). Considerando el principio de la *racionalidad contextualizada*, se tiene que las características de los conocimientos producidos en ciertos contextos de uso están determinadas por dichos contextos (Espinoza, 2009). Por tanto, la geometría puesta en uso en este tipo de problemas no tiene necesariamente las mismas características que la geometría escolar, porque el análisis está situado al fenómeno específico.

Los estudiantes tendieron a usar en sus respuestas el teorema del ángulo inscrito solo para su caso particular en la semicircunferencia

Otra de las respuestas recurrentes encontrada en 6 de los 8 cursos, asociada a las actividades 2 y 3, fue la tendencia que manifestaron los estudiantes de usar el teorema del *ángulo inscrito en la semicircunferencia (RR3)*, con su consecutivo ángulo recto inscrito. Para hacer esto, los estudiantes rehicieron el dibujo del problema original haciendo que el segmento AB fuera el diámetro de la circunferencia que pasa por A, B y E (figura 15).

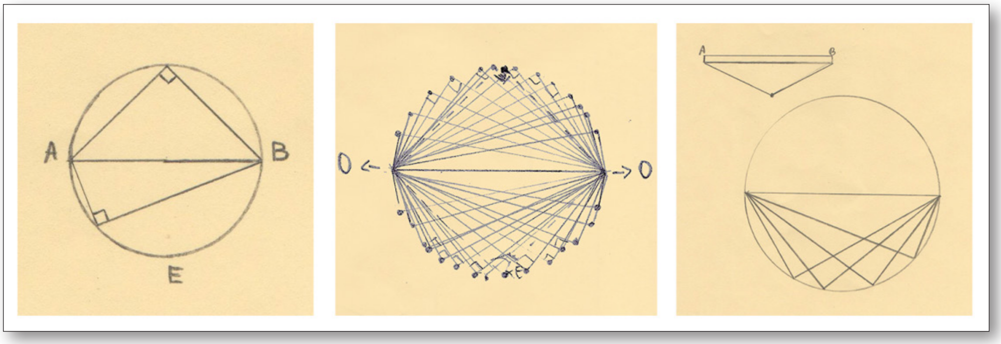

Fig. 15. Producciones de estudiantes correspondientes a RR3, reportada en los cursos C2, C3 y C5, respectivamente.

Estas respuestas se contrastan con la esperada para el problema (figura 12), así como con la proposición 37 de la *Óptica de Euclides*, la cual da como respuesta al problema el ángulo inscrito en un arco cualquiera de la circunferencia (figura 6). Después de analizar las justificaciones de las respuestas de estos estudiantes, concluimos que hacen alusión explícita a la conservación del ángulo inscrito para el caso de la semicircunferencia, pero no manifiestan comprensión del teorema para cualquier ángulo inscrito. De hecho, dado un punto y la cuerda AB, no pudieron reconstruir el arco de circunferencia asociado. Por ejemplo, en el reporte del profesor del curso C2, se evidenció que un estudiante dibuja el punto E, y dos puntos más desde donde el segmento AB se verá más pequeño y más grande. A su vez, dibuja la semicircunferencia de diámetro AB y señala que, en cualquier punto de esta, la magnitud AB se verá del mismo tamaño (figura 16). Sin embargo, no hace alusión a la conservación del ángulo para el arco de circunferencia que pasa por A, E y B, que es la respuesta correcta al problema planteado.

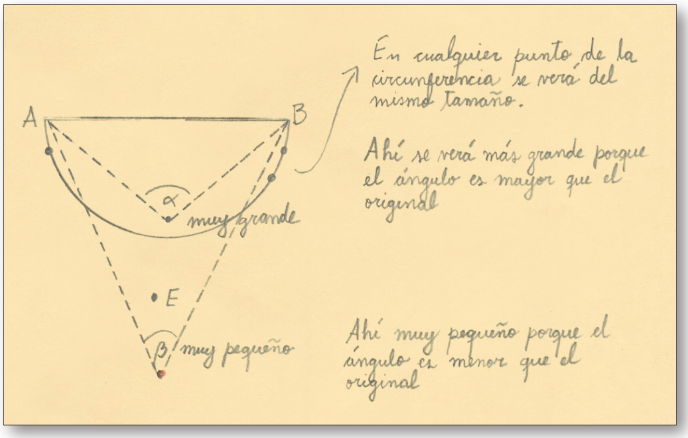

Fig. 16. Producción de un estudiante del curso C2.

El mismo estudiante de la producción evidenciada en la figura 16 escribe luego: «la distancia desde el ojo al segmento es igual a la medida del segmento/2» (figura 17), con lo cual justifica que el punto E debe estar en la semicircunferencia. En otras palabras, el estudiante reconoce la conservación del ángulo inscrito para el caso particular del ángulo recto, mas no para cualquier ángulo. De hecho, rehace el dibujo sobre una semicircunferencia aun cuando la ubicación de los elementos del dibujo original (figura 11) no resultaban compatibles con dicha figura. Incluso, al explicar que el ángulo es igual para cualquier punto de la semicircunferencia «menos al llegar al segmento mismo», logra reconocer que el ángulo no se conservará si el ojo está ubicado en los puntos A y B, lo que expresa una propiedad del ángulo inscrito. La idea del ángulo recto es tan persistente que el estudiante agrega otro dibujo más pequeño en el que se explicita que los ángulos inscritos que él considera son rectos.

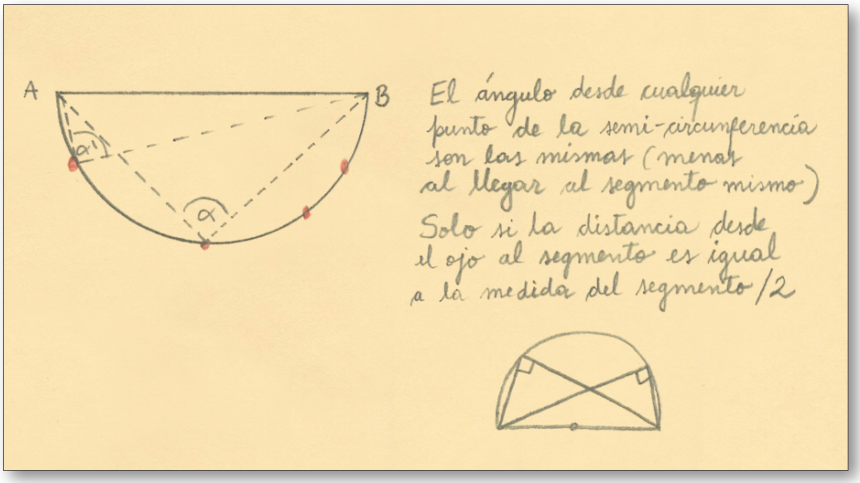

Fig. 17. Producción de un estudiante del curso C2.

La recurrencia de esta respuesta entre los distintos cursos nos llevó a preguntarnos por qué solo utilizaron el teorema para el caso del ángulo inscrito en la semicircunferencia. Al respecto, seis de los ocho profesores señalaron que enseñaban el teorema del ángulo inscrito de manera implícita al enseñar el teorema del ángulo central. A su vez, los ocho profesores señalaron que enseñaron este teorema para el caso de la semicircunferencia. Por tanto, ante la pregunta ¿por qué los estudiantes no usaron el teorema del ángulo inscrito de manera general?, una posible respuesta puede estar en el tratamiento que tiene este teorema en la escuela.

Este tratamiento escolar del teorema, manifestado por los profesores, está presente también en los textos escolares, en los que la formulación general del teorema del ángulo inscrito se presenta después de su caso particular en la semicircunferencia, o bien queda evocada implícitamente en el teorema del ángulo central (Muñoz, Rupin y Jiménez, 2015; Zañartu, Darrigrandi y Ramos, 2012). Al respecto, Espinoza, Vergara y Valenzuela (2017), al contrastar la geometría de la *Óptica de Euclides* con la geometría escolar presentada en textos escolares de uso oficial en Chile, explican que existen formas distintas de significar el teorema del ángulo inscrito. Los autores señalan que en los *Elementos* de Euclides se presenta el teorema del ángulo inscrito para cualquier arco de circunferencia (figura 6), proveyendo «la posibilidad de mover una cuerda dentro del círculo y analizar lo que sucede con el ángulo» (p. 29); en cambio, en los textos escolares, el teorema del ángulo inscrito se explica enfatizando el caso particular del ángulo recto inscrito en la semicircunferencia. Además, en el tratamiento de estos teoremas en textos escolares subyace una *racionalidad* estática y un predominio del cálculo aritmético y algebraico (Espinoza, Vergara y Valenzuela, 2017). En oposición a aquello, para resolver el problema propuesto en esta investigación, se requiere usar el teorema del ángulo inscrito de manera dinámica para cualquier arco de circunferencia, lo cual es propio de la *racionalidad contextualizada* dinámica-comparativa de la *Óptica de Euclides*.

Se sabe que el conocimiento previo en geometría desempeña un papel relevante en la forma en que los estudiantes consideran los datos y abordan los problemas (Clemente y Linares, 2015). Por otro lado, el enfoque desde la perspectiva deductiva, sistemática, lógica y formal de la geometría escolar resulta disfuncional en el momento de emplear ejemplos y resolver problemas del mundo real (Reiss y Renkl, 2002). Dado lo anterior, y teniendo en cuenta que los textos escolares evidencian la forma habitual en que se planifica la enseñanza, sostenemos que una posible causa de por qué los estudiantes tendieron a usar en sus respuestas el teorema del ángulo inscrito en la semicircunferencia es el tratamiento que recibe este teorema, al menos, en el sistema educacional chileno.

CONCLUSIONES

La percepción visual es un fenómeno inherente a la experiencia cotidiana de las personas videntes. A su vez, este fenómeno se ha estudiado en distintos periodos históricos y entornos culturales (Scriba y Schreiber, 2015). En esta investigación, nos propusimos caracterizar dificultades que surgen en el proceso de resolución que realizan estudiantes de secundaria al abordar un *problema del mundo real con sustento histórico-cultural* en el ámbito de la percepción visual, lo que conlleva el uso del teorema del ángulo inscrito. El método empleado fue una *ingeniería didáctica*, en la cual se confrontan los resultados de una indagación *histórico-epistemológica* con las respuestas recurrentes que surgieron entre estudiantes de distintos cursos al abordar un problema diseñado sobre la base de dicha indagación. A modo de conclusión, identificamos dos dificultades que manifestaron los estudiantes al resolver el problema geométrico. Dichas dificultades, sostenemos, requieren ser consideradas al incluir *problemas del mundo real* en el aula de matemáticas.

La primera dificultad está relacionada con la tendencia a justificar las respuestas desde la racionalidad provista por el fenómeno involucrado. Si bien estas respuestas fueron incorrectas desde la geometría, considerando la *racionalidad contextualizada*, podemos establecer su validez desde el fenómeno. De esta manera, en la resolución de problemas del mundo real, consideramos fundamental analizar desde qué ámbito los estudiantes piensan y justifican sus respuestas; sobre todo, teniendo en cuenta que los conocimientos que surgen de la interacción del ser humano con un fenómeno específico están situados en los aspectos propios de dicho fenómeno (Cantoral, 2013).

Estas justificaciones situadas al fenómeno no se evidenciaron solo en las producciones de los estudiantes, sino que también se hallaron en la *Óptica de Euclides*. Por tanto, concluimos que, cuando los estudiantes resuelven un problema del mundo real usando geometría, el fenómeno puede dar el contexto y significado a sus justificaciones. Esto ocurre incluso cuando los estudiantes usan en sus respuestas teoremas o construcciones geométricas. Sobre la base de esto, planteamos que la geometría en uso en problemas contextualizados requiere una abstracción que no se desconecta completamente del fenómeno involucrado. En consecuencia, las producciones geométricas que surgen al resolver este tipo de problemas no tienen que operar necesariamente bajo la misma estructura, lógica y validez que la geometría escolar. Como señalan Carraher, Carraher y Schliemann (2007), las matemáticas que se usan en la resolución de problemas del mundo real no tienen necesariamente las mismas características que la matemática escolar.

La segunda dificultad identificada en esta investigación está relacionada con la tendencia a poner en uso el teorema del ángulo inscrito solo para el caso particular de la semicircunferencia. Aunque el problema requiere el uso del teorema del ángulo inscrito para cualquier ángulo, lo habitual –tanto en la práctica de enseñanza de los profesores de los cursos estudiados como en los libros de texto– es enfatizar el significado particular del ángulo inscrito en la semicircunferencia, dejando los otros casos (arco mayor o menor a una semicircunferencia) implícitos o no evocados. Este hecho nos lleva a plantear la siguiente pregunta: ¿hasta qué punto la organización y estructura de la matemática escolar es pertinente para que los aprendices puedan usar este conocimiento en la resolución de problemas del mundo real?

Para que los estudiantes puedan usar el teorema del ángulo inscrito en el estudio de la percepción visual, en conjunto, con propiciar que estos aprendan que el ángulo inscrito se conserva para cualquier arco de circunferencia, se requiere además generar una ruptura con la racionalidad subyacente a la geometría escolar. Es decir, se necesita superar la racionalidad estática y el predominio de lo calculatorio de la geometría escolar por una racionalidad con carácter dinámico, cuyo abordaje se sustente en una heurística basada en la comparación (Espinoza, Vergara y Valenzuela, 2017). De esta manera, para responder a los objetivos curriculares relativos a articular la enseñanza de la matemática con la vida cotidiana de los estudiantes, constatamos la necesidad de incorporar al aula de matemáticas problemas que movilicen la *racionalidad contextualizada* subyacente al uso del conocimiento en contextos específicos (Espinoza, Vergara y Valenzuela, 2017).

Soto y Cantoral (2014) plantean que la matemática escolar, al soslayar las múltiples significaciones que tiene este conocimiento en distintos contextos de uso, delimita las formas de actuar, razonar, significar y/o argumentar de los estudiantes. Con miras a propiciar que los estudiantes vinculen las matemáticas que aprenden en la escuela con el mundo en el que viven, coincidimos con estos autores en la necesidad de realizar una reformulación respecto a cómo se concibe, organiza y enseña la geometría escolar, de manera particular en el caso del tratamiento del teorema del ángulo inscrito.

En síntesis, las dos dificultades reportadas en la presente investigación nos permiten concluir que el uso de conocimientos escolares en *problemas del mundo real* no es un asunto trivial, sino que es un proceso complejo. Previamente, Carraher et al. (2007) cuestionaron el supuesto de la transferencia natural de los conocimientos escolares a la resolución de problemas del mundo real. En efecto, «las comprensiones cotidianas no escolares y los procedimientos mentales que involucran ciertos funcionamientos y relaciones matemáticas elementales son totalmente diferentes de aquellos que se esperan de estudiantes en la escuela» (Arrieta y Díaz, 2015, p. 21). Al respecto, nosotros agregamos que la complejidad de esta transferencia deviene, en parte, de la distancia existente entre la organización, estructura y funcionamiento de la matemática escolar y las características del conocimiento puesto en uso en situaciones, contextos y prácticas específicas. En definitiva, señalamos que es necesario tanto cuestionar el supuesto de la transferencia natural entre de la geometría escolar hacia contextos reales como también el cómo esta se concibe y estructura en la escuela.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos el financiamiento a esta investigación por parte de CONICYT + PAI / Concurso nacional apoyo al retorno de investigadores/as desde el extranjero, convocatoria 2014 + FOLIO 82140031, Gobierno de Chile.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de Educación*, *43*, 85-101. Obtenido de https://rieoei.org/RIE/article/view/752

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 19-48. https://doi.org/10.12802/relime.13.1811

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady y L. Moreno (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. y Robinet, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *3*(1), 5-64. Obtenido de https://rdm.penseesauvage.com/Conceptions-du-cercle-chez-les.html

Bagazgoitia, A. (2003). Geometría con Cabri. *Sigma*, *22*(1), 83-98. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=803919

Bartolini-Bussi, M. G. B., Taimina, D. e Isoda, M. (2010). Concrete models and dynamic instruments as early technology tools in classrooms at the dawn of ICMI: from Felix Klein to present applications in mathematics classrooms in different parts of the world. *ZDM*, *42*(1), 19-31. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0220-6

Bray, A. y Tangney, B. (2016). Enhancing student engagement through the affordances of mobile technology: a 21st century learning perspective on realistic mathematics education. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(1), 173-197. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0158-7

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (Trad. B. Fregona). Buenos Aires: Libros el Zorzal.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17. http://doi.org/10.12802/relime.13.1810

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91-116. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274032530006

Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (2007). *En la vida diez, en la escuela cero* (7.ª ed.). Buenos Aires: Siglo XXI Editores.

Clemente, F. y Linares, S. (2015). Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestros en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(1), 9-27. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1332

Corica, A. R. y Marín, E. (2014). Actividad de estudio e investigación para la enseñanza de nociones de geometría. *Números*, *85*, 91-114. Obtenido de http://hdl.handle.net/11336/13134

Dejarnette, A. F. y González, G. (2016). Thematic analysis of students´talk while solving a real-world problem in geometry. *Linguistics and Education*, *35*(1), 37-49. https://doi.org/10.1016/j.linged.2016.05.002

Drisko, J. W. y Maschi, T. (2016). *Content analysis. Pocket guides to social work research methods*. Nueva York: Oxford University Press.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo xix. Un estudio Socioepistemológico* (tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Espinoza, L. (2014). *La desescolarización del saber: su construcción social desde el malabarismo y las artes circenses* (tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D. F., México.

Espinoza, L., Vergara A. y Valenzuela, D. (2017). La geometría escolar en crisis: una confrontación con la olvidada «Óptica de Euclides». *Premisa*, *19*(74), 22-34. Obtenido de https://docplayer.es/95758030-La-geometria-escolar-en-crisis-una-confrontacion-con-la-olvidada-optica-de-euclides.html

Espinoza, L., Vergara A. y Valenzuela, D. (2018). Geometría en la práctica cotidiana: la medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(3), 247-274. https://doi.org/10.12802/relime.18.2131

Euclides (1774). *Los seis primeros libros y el undécimo, y duodécimo de los Elementos de Euclides* (Trad. Simson, R.). Obtenido de https://books.google.cl/books/about/Los_seis_primeros_libros_y_el_undecimo_y.html?id=qWvjXYeSluIC&redir_esc=y

Euclides (2000). La Óptica de Euclides. (Trad. Ortiz, P.). En J. Curbera (Ed.), *Aristóteles: sobre las líneas indivisibles. Mecánica. Euclides: Óptica. Catóptrica. Fenómenos* (pp. 117-197). Madrid: Gredos.

Freudenthal, H. (2002). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jurdak, M. (2016). *Learning and teaching real world problem solving in school mathematics.* Switzerland: Springer.

Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significado trigonométrico en el profesor. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1193-1216. http://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a10

Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: a teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 225-245. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9450-6

Muñoz, G., Rupin, P. y Jiménez, L. (2015). *Matemáticas 2.º medio, texto de estudiante*. Ministerio de Educación. Santiago de Chile: SM Chile.

OECD. (2016). *PISA 2015 results (volume I): excellence and equity in education*. París: OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/3a838ef3-es

Owen, W. (1984) Interpretive themes in relational communication, *Quarterly Journal of Speech*, *70*(3), 274-287. https://doi.org/10.1080/00335638409383697

Reiss, K. y Renkl, A. (2002). Learning to prove: the idea of heuristic examples. *ZDM*, *34*(1), 29-35. https://doi.org/10.1007/BF02655690

Scriba, C. J. y Schreiber, P. (2015). *5000 years of geometry*, *mathematics in history and culture*. Nueva York: Springer Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0898-9

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1525-1544. http://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25

Stillman, G. A., Blum, W. y Biembengut, M. S. (2015). *Mathematical modelling in education research and practice*. Switzerland: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8

Zañartu, M., Darrigrandi, F. y Ramos, M. (2012). *Texto para el estudiante matemáticas 2.º educación media*. Santiago de Chile: Santillana.

Contextualization in mathematics: use of the inscribed angle theorem in the geometrization of visual perception

Lianggi Espinoza Ramírez
Universidad de Valparaíso, Chile
lianggi.espinoza@uv.cl

Andrea Stephanie Vergara Gómez
Universidad Academia de Humanismo Cristiano, Chile
asvergarag@docentes.academia.cl

David Valenzuela Zúñiga
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
david.valenzuela.z@gmail.com

Given the growing interest of international standards in the development of school mathematics that will enable students to solve problems and understand real phenomena, it is essential to comprehend how they engage in learning atmospheres resembling context situations that are genuinely realistic. When it comes to teaching and learning, *contextualization* has different meanings and emphasis in specialized literature. However, for this study, we considered contextualization in mathematics as the action of incorporating to teaching contexts knowledge which is linked to the real world of the student, which have also been fundamental for humanity, that is, that they have been developed in different historical periods and cultural settings. We have called these *real-world problems* with a historic-cultural support. Because of the need to understand how students address real-world problems in school, we set the aim to characterize the difficulties that arise when students from secondary education address a geometry problem that is contextualized in the visual perception field. Such problem was designed basing upon a historic-epistemological inquiry of some theorems found in Euclid's *Optics*, a work that geometrizes the visual perception phenomenon from points, segments and angles. These theorems were selected because they have a special correspondence to the inscribed angle theorem, which is frequently present in the school-level geometry curricula.

The method used was a didactic engineering work consisting of four stages: a preliminary and *a priori* analysis, experimentation, *a posteriori* analysis and a comparison. In the first stage we performed a historic-epistemological inquiry of some sections basin upon two works of Euclid's, *Optics* and *Elements*. In the second stage, which is based on the first, we designed a contextualized problem, generating questions that would promote a non-didactic environment. The problem was initially explored with a class of 35 students; then it was applied in 8 classes from schools located in different cities in the central and northern regions of Chile. In the third stage we analyzed the answers of students considering the criteria of recurrence of the theme analysis. Finally, in the fourth stage, we compared the *a posteriori* analysis results with the preliminary and *a priori* analysis.

The results revealed two main difficulties among students when solving the proposed problem. The former is related to the tendency to justify answers from the rationality of the phenomenon, which provided context and meaning to such justifications. The latter difficulty is expressed in the tendency of students to force the geometrical configuration for the specific case of the inscribed angle theorem in a semi-circumference, limiting the answers and analysis performed by the students. These results do not give hints on whether the organization and structure of school mathematics is appropriate for students or not. The transition from school geometry to geometry for real-world problem solving is not a trivial matter, but a complex process that is necessary to study in depth. Hence we need to depart from the assumption that there is a natural transition from school geometry to real contexts.

Finally, the implementation of the developed design allowed us to connect the inscribed angle theorem in a circumference with a real world phenomenon, revealing some difficulties that typically arise in the solution of contextualized problems. In the same way, our research proves the problematization of the visual perception field in the classroom to be useful, so that both teachers and students rebuild the dynamic meanings of the angle theorem in the circumference.