ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 38-2 (2020), 83-101
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3038
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Instrumentación de una progresión de estrategias por estudiantes para maestro

Instrumentation of a progression of strategies by prospective primary teachers

Eloísa Montero
Didáctica de las Matemáticas. Escuni Centro Universitario de Magisterio. Madrid (España)
emontero@escuni.es

María Luz Callejo, Julia Valls
Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante. Alicante (España).
luz.callejo@ua.es, julia.valls@ua.es

RESUMEN • El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo estudiantes para maestro (EPM) hacen uso de una progresión de estrategias (PE) de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida como instrumento conceptual para interpretar el pensamiento matemático de los niños. Participaron 61 EPM en un experimento de enseñanza cuya finalidad era adquirir la competencia «mirar profesionalmente el pensamiento matemático» de los niños de Primaria. El uso por parte de los EPM de la PE para identificar e interpretar estrategias usadas por los niños se analizó desde el enfoque instrumental. Los resultados muestran tres grupos de EPM: los que no usaron la progresión y la consideraron un artefacto, los que utilizaron características de la progresión construyendo un esquema de acción instrumental y los que usaron toda la información e instrumentaron la progresión.

PALABRAS CLAVE: Resolución de problemas de división-medida con fracciones; Progresión de estrategias; Mirada profesional; Instrumentación; Estudiantes para maestro.

ABSTRACT • The aim of this research is to characterize how prospective primary teachers (PPT) make use of a progression of multiple-division problem-solving strategies as a conceptual instrument to interpret children's mathematical thinking. 61 PPT participated in a teaching experiment whose purpose was to develop the teaching competence «professional noticing» primary students' mathematical thinking. The use of the progression of strategies by the PPT was analyzed by means of an instrumental approach to characterize how they identified and interpreted strategies that were used by children. The results show three different groups of PPT, according to the use of the progression of strategies: those who did not use the progression, considering it an artifact; those who used certain characteristics of the progression, and generated instrumental action schemes, and those who used all the information and instrumented the progression.

KEYWORDS: Solving of measurement division problems with fractions; Progression of strategies; Professional noticing; Instrumentation; Prospective primary teachers.

Recepción: julio 2019 • Aceptación: diciembre 2019 • Publicación: junio 2020

INTRODUCCIÓN

Una tendencia actual en educación matemática señala la importancia de que los estudiantes resuelvan problemas usando sus ideas matemáticas. Esta tendencia sitúa el foco de atención en cómo los EPM interpretan las estrategias usadas por los niños en la resolución de problemas (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). Por otra parte, la investigación ha documentado tipos de estrategias y de representaciones que usan los niños al resolver problemas (Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999), en particular en problemas con fracciones y decimales (Empson y Levi, 2011; Steffe, 2004). Estos resultados se convierten en información relevante para los EPM.

Diversas investigaciones muestran que los EPM tienen dificultades para resolver problemas con fracciones, lo que muestra una comprensión limitada de los significados de los algoritmos de cálculo (Ball, 1990; Depaepe et al., 2015; Li y Kulm, 2008). Respecto a los problemas de división con fracciones, Graeber, Tirosh y Glover (1986) y Ball (1990) señalaron que los EPM tendían a interpretar la división solo como división-partitiva. En estos problemas se reparte un conjunto de objetos de forma equitativa entre un número de grupos («Tengo que repartir 12 caramelos entre 3 niños, ¿cuántos caramelos le tocan a cada niño?»). Sin embargo, tenían dificultades para resolver situaciones de división-medida, es decir, determinar cuántos grupos de un tamaño se pueden formar con una cantidad de objetos («He comprado 4 botes de comida para los peces de mi pecera. Cada día echo en la pecera 2/3 de bote. ¿Para cuántos días tengo?»). Fernández, Callejo y Márquez (2012) propusieron a un grupo de EPM un problema de división-medida con resto («Tengo 4 pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño. ¿A cuántos niños puedo dar?, ¿qué me sobra?») y pidieron resolver el problema e interpretar y valorar cuatro respuestas de estudiantes de Primaria. Los resultados mostraron que algunos EPM no resolvieron el problema correctamente, pero interpretaron y valoraron las respuestas de los estudiantes de manera correcta, mientras que otros EPM tuvieron dificultad para interpretar las respuestas que utilizaban procedimientos distintos a los que ellos habían empleado.

De los resultados de estas investigaciones se deriva la importancia de proporcionar a los EPM información sobre cómo los niños progresan en el uso de estrategias para resolver problemas a fin de que puedan tomar decisiones sobre la enseñanza de manera adecuada (Edgington, Wilson, Sztajn y Webb, 2016; Empson y Jacobs, 2008; Ivars, Fernández y Llinares, 2019; Steinberg, Empson y Carpenter, 2004; Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington, 2012; Wilson, Mojica y Confrey, 2013; Wilson, Sztajn, Edgington y Myers, 2015).

Las trayectorias de aprendizaje han sido usadas para favorecer el desarrollo de la competencia docente «mirar profesionalmente el pensamiento matemático» de los niños (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018; Ivars et al., 2019; Sánchez-Matamoros, Moreno, Pérez-Tyteca y Callejo, 2018). Wilson et al. (2015) indican que la información sobre una trayectoria de aprendizaje de los contenidos matemáticos podría ayudar a los EPM a desarrollar su mirada profesional, proporcionándoles referencias sobre cómo los conceptos matemáticos se desarrollan mediante conexiones entre objetivos de aprendizaje y actividades de enseñanza. Por otra parte, los resultados de Sánchez-Matamoros et al. (2018) muestran la relevancia del enfoque instrumental para analizar cómo los EPM de Educación Infantil usan una trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida, y cómo este uso les permite identificar elementos matemáticos en las respuestas de los alumnos, interpretar su nivel de comprensión y proponer tareas para avanzar en esta, es decir, desarrollar la mirada profesional.

Desde estas referencias previas, el objetivo de esta investigación es caracterizar cómo los EPM de Educación Primaria hacen uso de una PE de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida como instrumento conceptual para interpretar el pensamiento matemático de los niños.

MARCO TEÓRICO

Nuestro marco teórico lo conforman tres ideas interrelacionadas: una PE de resolución de problemas de división-medida con fracciones, mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes y la teoría de la génesis instrumental. La génesis instrumental permite caracterizar cómo los EPM utilizan la PE como guía para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes.

Progresión de estrategias de resolución de problemas de «grupos múltiples» del tipo división-medida

Los problemas de grupos múltiples (Empson y Levi, 2011) son problemas de estructura multiplicativa del tipo «isomorfismo de medidas» de proporcionalidad simple entre dos magnitudes (Vergnaud, 1994). Esta estructura relaciona tres cantidades: número de grupos, cantidad en cada grupo y cantidad total en el conjunto de los grupos (tabla 1). En esta estructura se identifican tres tipos de problemas según cuál sea la incógnita: la cantidad total, el número de botes (problemas de multiplicar); el número de grupos, el número de días que puedo dar comida a los peces (problemas de división-medida, ejemplo en la tabla 1), o la cantidad en cada grupo, la cantidad de comida que echo cada día (división-partitiva).

Tabla 1.
Cantidades que se relacionan en un problema de proporcionalidad simple

Problema de la pecera «He comprado 4 botes de comida para los peces de mi pecera. Cada día echo en la pecera 2/3 de bote. ¿Para cuántos días tengo?»		
Número de días	Cantidad por día	Cantidad total
X días	2/3 de bote	4 botes

Empson y Levi (2011) denominan «problemas de grupos múltiples» (tabla 1) aquellos donde hay un número entero de grupos y una cantidad fraccionaria en cada grupo. Estas autoras caracterizan en tres etapas una PE correctas de resolución de este tipo de problemas que los niños utilizan antes de conocer el algoritmo de la división de fracciones. En las dos primeras etapas ponen en práctica estrategias aditivas y en la tercera, multiplicativas (figura 1).

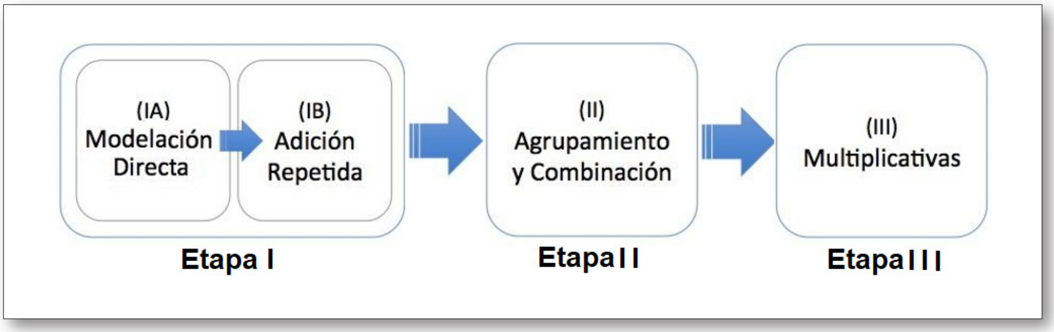


Fig. 1. Progresión de estrategias de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida (Empson y Levi, 2011, p. 62)

– *Etapa I: Modelización directa y adición repetida.* Se representa cada unidad fraccionaria que tiene que ser repetida individualmente. En la modelización directa los niños representan icónicamente todas las cantidades y cuentan o suman (y en ocasiones restan) hasta llegar a la respuesta final. En el problema de la pecera (tabla 1), la unidad fraccionaria que ha de ser repetida es 2/3. Los niños dibujan los 4 botes de comida, dividen cada uno en tercios; a continuación, hacen grupos de dos tercios, cantidad que se gasta cada día, y cuentan seis veces hasta completar los 12 tercios de comida. Como cuentan 6 veces 2/3 la solución es 6 días. En esta etapa la estrategia de adición repetida se diferencia de la modelización directa en que las fracciones no se representan con dibujos, sino que los niños escriben «2/3» o «2 tercios».

– *Etapa II: Agrupamiento y combinación.* También se utilizan estrategias aditivas, pero no se representa cada unidad fraccionaria, sino que se agrupan y se cuentan conjuntos de fracciones con la idea de que con ese agrupamiento se tenga un número entero y así poder utilizar estos agrupamientos para contar el número de grupos (sumando un grupo, dos grupos, etc.). Por ejemplo, en el problema de la pecera (tabla 1) se agrupa tres veces 2/3 y se tiene 2/3 + 2/3 + 2/3, que son 2 botes de comida que sirven para 3 días; 2/3 + 2/3 + 2/3 son otros 2 botes más que sirven para 3 días más; en total, con 4 botes de comida se tiene para 6 días.
– *Etapa III: Estrategias multiplicativas.* Se relaciona la unidad fraccionaria o un grupo con el total, usando la relación de proporcionalidad ($f(ax) = af(x)$), o un proceso constructivo combinando las relaciones de proporcionalidad y la suma ($f(ax + bx) = af(x) + bf(x)$), o la multiplicación directamente. En el problema de la tabla 1 se interpreta el significado de la fracción como relación multiplicativa (razón): 2/3 significa que con 2 botes de comida se tiene para 3 días; si se tienen 4 botes (doble de botes) se tiene para 2 x 3 = 6 días (doble de días).

Mirada profesional sobre el pensamiento matemático de los estudiantes

Una finalidad de la formación del profesorado es desarrollar las competencias profesionales de la función docente, en particular la competencia docente «mirar profesionalmente el pensamiento matemático» de los estudiantes. Jacobs et al. (2010) conceptualizan esta competencia en tres destrezas interrelacionadas y progresivas: i) identificar las estrategias de los estudiantes en la resolución de tareas, en nuestro caso estrategias de resolución de problemas de división-medida con fracciones; ii) interpretar su comprensión basándose en las estrategias que ponen en juego, en nuestro caso la etapa en la que se encuentran, y iii) tomar decisiones instruccionales según la interpretación inferida. Estas destrezas están anidadas unas en otras. No se puede hacer una interpretación de la comprensión sin haber identificado las estrategias bien, ni tomar decisiones instruccionales adecuadas sin haber interpretado correctamente la comprensión.

Instrumentación de una progresión de estrategias

La información sobre la PE usada por los niños para resolver los problemas puede ser considerada un instrumento conceptual (Llinares, 2014). Para analizar cómo los EPM hacen uso de esta información para interpretar las respuestas de los niños, adaptamos las referencias de la génesis instrumental (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010), que distingue entre artefacto e instrumento. El artefacto es la herramienta propiamente dicha (PE de resolución de problemas) y se convierte en instrumento cuando el usuario establece una relación con este, haciéndolo suyo e integrándolo en la actividad que realiza (usar la PE para identificar estrategias e interpretar la etapa de progresión). Por tanto, el artefacto viene dado, mientras que el instrumento lo construye el sujeto a través de su actividad (Verillon y Rabardel, 1995).

La génesis instrumental es el proceso a través del cual el artefacto deviene en instrumento y sirve de intermediario entre objeto y sujeto (Trouche, 2004). En esta génesis se pueden observar dos procesos relacionados, uno orientado al artefacto (instrumentalización) y otro orientado al sujeto (instrumentación). Rabardel (1995) explica que la combinación de ambos procesos conduce a reorganizar los esquemas de utilización y, en consecuencia, a modificar el instrumento. El sujeto puede apropiarse del artefacto de distintas maneras y desarrollar dos esquemas diferentes: esquemas de uso y esquemas de acción instrumental (Rabardel, 1995). Un esquema de uso está directamente relacionado con el artefacto y puede servir como base para llegar a desarrollar el correspondiente esquema de acción instrumental. En nuestro caso, el EPM genera un esquema de uso cuando identifica estrategias basándose en aspectos formales como las operaciones realizadas por los estudiantes, teniendo o no en cuenta su significado (por ejemplo, pueden considerar el uso de sumas sucesivas, que está presente en distintas estrategias, como la «adición repetida», teniendo o no en cuenta cuál es la unidad fraccionaria que se ha repetido). En el esquema de uso, no utiliza las estrategias identificadas para interpretar la etapa de progresión en la que se encuentran los niños.

Los esquemas de acción instrumental están relacionados con el uso que el sujeto hace del artefacto con vista a realizar una acción o tarea. En nuestro caso, se genera un esquema de acción instrumental cuando el EPM identifica las estrategias aditivas o multiplicativas de los niños y las usa para interpretar la etapa en la que se encuentran. A medida que el sujeto utiliza los esquemas de acción instrumental, puede constatar sus potencialidades y limitaciones. Los esquemas generados dependen de los conocimientos del sujeto.

Por tanto, la instrumentación por parte del EPM de la información proporcionada por una PE implica usar toda la información, incluidos los conocimientos del EPM, para identificar las estrategias aditivas y multiplicativas empleadas por los niños, e interpretar la etapa de progresión en la que se encuentran.

Desde el objetivo de investigación y teniendo en cuenta las referencias teóricas anteriores, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo los EPM instrumentan la PE de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida?

MÉTODO

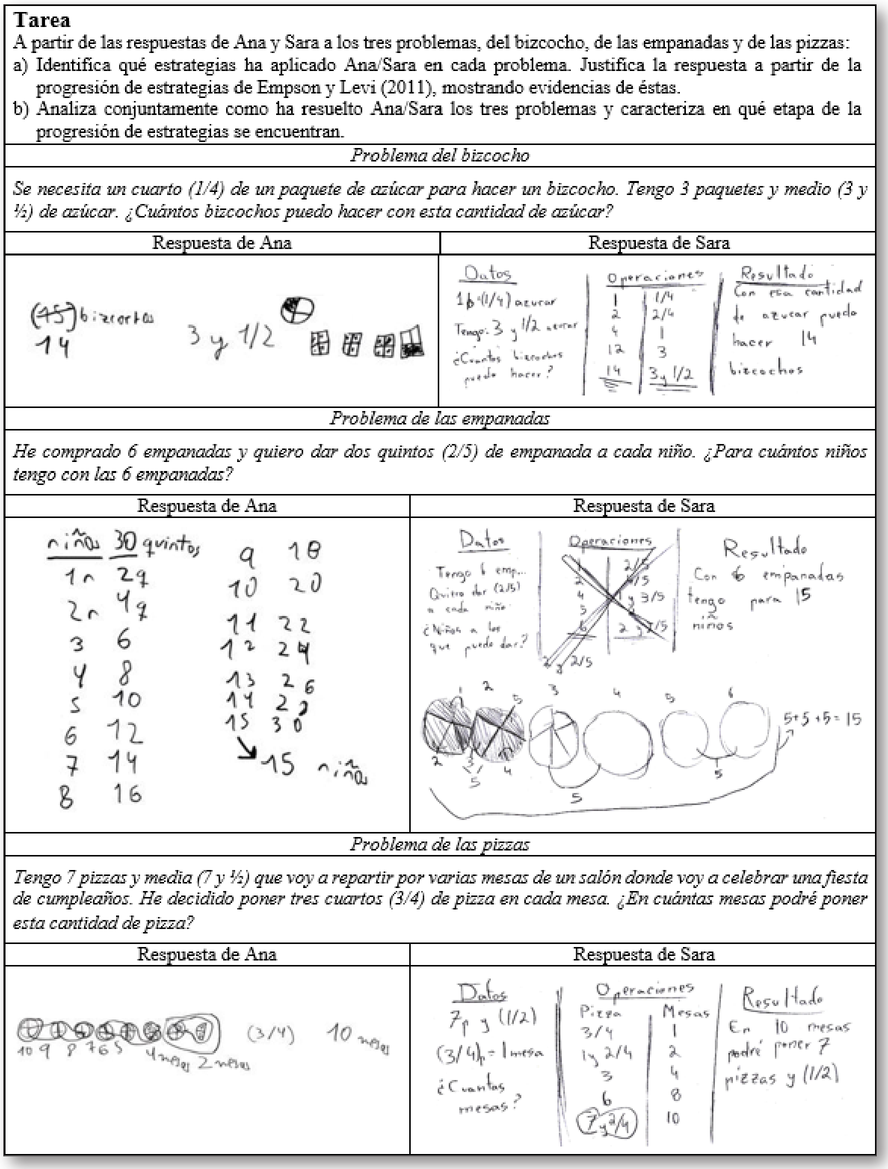
Participantes y contexto

Los participantes en esta investigación fueron 61 EPM de Educación Primaria que cursaban una asignatura sobre las características del aprendizaje matemático de los niños (quinto semestre, tercer año). Esta asignatura incluye un módulo sobre fracciones cuyo objetivo es adquirir la competencia docente «mirar profesionalmente el pensamiento matemático» de los estudiantes de Educación Primaria cuando resuelven problemas de división-medida con fracciones. El módulo consta de nueve sesiones de dos horas. En la primera sesión, los EPM resolvieron un problema de división-medida y se les pidió que anticiparan dos hipotéticas respuestas de niños de Educación Primaria. En las siguientes sesiones, los EPM usaron la PE de Empson y Levi (2011) para identificar las estrategias en las respuestas de los niños (sesiones 2, 3 y 4), resolver problemas con distintas estrategias (sesión 5) e interpretar las respuestas de los niños para identificar los niveles de desarrollo (sesiones 6 y 7), para luego realizar una tarea de evaluación (sesión 8, figura 2) cuya revisión concluyó el módulo (sesión 9).

Las tareas de análisis de las respuestas de los niños propuestas a los EPM en el módulo son una aproximación a la práctica (Grossman et al., 2009), donde los EPM pueden poner en juego habilidades similares a las que habrán de desarrollar en el ejercicio de su profesión.

Los datos de la investigación son las respuestas de los EPM a la tarea de evaluación (figura 2). En esta tarea se proporcionaban a los EPM las respuestas de dos niñas, Ana y Sara, a tres problemas de división-medida (P1-bizcochos, P2-empanadas y P3-pizzas). Los EPM tenían que contestar a lo siguiente:

– Identifica qué estrategias han aplicado Ana y Sara en cada problema. Justifica la respuesta a partir de la PE mostrando evidencias de estas.
– Analiza conjuntamente cómo han resuelto Ana y Sara los tres problemas y caracteriza en qué etapa de la PE se encuentran.



Tarea

A partir de las respuestas de Ana y Sara a los tres problemas, del bizcocho, de las empanadas y de las pizzas:

a) Identifica qué estrategias ha aplicado Ana/Sara en cada problema. Justifica la respuesta a partir de la progresión de estrategias de Empson y Levi (2011), mostrando evidencias de éstas.

b) Analiza conjuntamente como ha resuelto Ana/Sara los tres problemas y caracteriza en qué etapa de la progresión de estrategias se encuentran.

Problema del bizcocho

Se necesita un cuarto (1/4) de un paquete de azúcar para hacer un bizcocho. Tengo 3 paquetes y medio (3 y ½) de azúcar. ¿Cuántos bizcochos puedo hacer con esta cantidad de azúcar?

Respuesta de Ana | Respuesta de Sara

Problema de las empanadas

He comprado 6 empanadas y quiero dar dos quintos (2/5) de empanada a cada niño. ¿Para cuántos niños tengo con las 6 empanadas?

Respuesta de Ana | Respuesta de Sara

Problema de las pizzas

Tengo 7 pizzas y media (7 y ½) que voy a repartir por varias mesas de un salón donde voy a celebrar una fiesta de cumpleaños. He decidido poner tres cuartos (3/4) de pizza en cada mesa. ¿En cuántas mesas podré poner esta cantidad de pizza?

Respuesta de Ana | Respuesta de Sara

Fig. 2. Tarea en la sesión 8.

Los tres problemas tienen la estructura de división-medida, en la que el divisor es una fracción, el dividendo un número natural o un número representado por un número mixto y el cociente un número natural, y el resto es cero. En los tres problemas, la fracción (divisor) puede ser usada como una unidad iterativa para determinar cuántas veces cabe en el dividendo (en el problema de la empanada, «cuántos 2/5 caben en 6»), y cuántas veces cabe una fracción en un número representado en forma mixta (en problema del bizcocho, «cuántos 1/4 caben en 3 ½»; y en el problema de la pizza «cuántos 3/4 caben en 7 ½»).

Las respuestas de las dos niñas mostraban estrategias que ejemplifican diferentes etapas de progresión (tabla 2).

Tabla 2.
Características de las estrategias de resolución y etapa de la progresión

Problemas	*Estrategias*	
	Ana	*Sara*
P1-bizcocho «cuántos 1/4 caben en 3½»	Modelización directa (representación icónica) Etapa IA	Estrategia multiplicativa: estrategia constructiva apoyada en la idea de proporcionalidad. Etapa III
P2- empanada «cuántos 2/5 caben en 6»	Adición repetida Etapa IB	Parte tachada: estrategia multiplicativa apoyada en la idea de proporcionalidad. Modelación directa (representación icónica) más agrupamiento y combinación (al identificar una relación entera: 2 empanadas cada 5 niños). Etapa II
P3- pizzas «cuántos 3/4 caben en 7½»	Modelización directa Etapa IA	Estrategia multiplicativa: estrategia constructiva apoyada en la idea de proporcionalidad. Etapa III
Etapa de progresión global	Etapa I	Etapa III

Ana resolvió el problema de los bizcochos usando modelización directa. Representó los 3 paquetes y medio de azúcar, los dividió en cuartos y contó los cuartos que había, lo que dio como solución 14. Resolvió el problema de las empanadas con adición repetida. Hizo una tabla con dos columnas, indicando número de niños y la cantidad de quintos que tenía. Terminó la tabla cuando llegó a los 30 quintos para las 6 empanadas. Usó la notación «2 quintos». Resolvió el problema de las pizzas también por modelización directa, representando las 7 pizzas y media, dividiéndolas en cuartos y asignando 3/4 a cada mesa, lo que dio como solución 10 mesas.

Sara resolvió el problema de los bizcochos mediante una estrategia multiplicativa. Organizó los datos en dos columnas y procedió con una estrategia constructiva aplicando la proporcionalidad a la relación «se necesita 1/4 de un paquete de azúcar para hacer un bizcocho». Así, el doble de bizcochos requiere el doble de azúcar; el triple de bizcochos, el triple de azúcar. Finalmente, añadió medio paquete de azúcar para emplear todo el azúcar disponible (3 y 1/2), con el que podía hacer 2 bizcochos más, con lo que llegó al total de 14 bizcochos.

En el problema de las empanadas, Sara comenzó (parte tachada) con una estrategia similar, organizando los datos y los resultados de aplicar una estrategia constructiva que alterna la proporcionalidad (el doble) con la suma (2/5 más de empanada es 1 niño más). Sin embargo, Sara no etiquetó las columnas usadas (niños / porciones de empanadas) y al llegar a la cantidad «6» (niños) parece haber entendido que había llegado a «6 empanadas», que es el dato del enunciado. La solución encontrada sería «con 6 empanadas tengo para 2 niños y 2/5». Sara tachó lo realizado y comenzó de nuevo, recurriendo a la representación icónica. Dibujó las 6 empanadas, dividió en 5 trozos las 3 primeras, agrupó de 2 en 2 (representando la unidad fraccionaria 2/5) y entendió que cada «2 empanadas tiene para 5 niños». A partir de ese momento siguió una estructura (aditiva) de agrupamiento y combinación: otras 2 empanadas más para otros 5 niños más. Finalmente: 5 + 5 + 5 = 15. La solución es «con 6 empanadas tengo para 15 niños».

En el problema de las pizzas, Sara usó la misma estructura de organización de datos y operaciones que en los dos problemas anteriores, pero con una ligera variación: colocó títulos en las columnas y cambió el orden. En la columna de la izquierda puso las pizzas (dato) y en la columna de la derecha puso el número de mesas (incógnita). Siguió una estrategia multiplicativa de tipo constructiva basada en calcular «el doble»: doble de pizzas, doble de mesas. Finalmente, sumó 1 y 2/4 pizzas con sus correspondientes 2 mesas. La solución final es «En 10 mesas podré poner 7 pizzas y ½».

Análisis de datos

El análisis de los datos se realizó en dos fases. En la primera se analizaron las respuestas de cada participante a la tarea. Consideramos qué estrategias identificaban los EPM: estrategias aditivas (modelización directa, adición repetida y agrupamiento y combinación, correspondientes a las etapas I y II) y estrategias multiplicativas de la etapa III.

En la segunda fase se agrupó a los EPM atendiendo a cómo relacionaban la información proporcionada por la PE con las evidencias. Agrupamos a los EPM en tres grupos:

- Grupo 0. No usan la información proporcionada para interpretar la etapa de progresión en la que se encuentran las niñas (PE como artefacto).
- Grupo 1. Usan algunas características de la información proporcionada para interpretar la etapa de progresión en la que se encuentra una de las niñas (construyen un esquema de acción instrumental).
- Grupo 2. Usan toda la información proporcionada para interpretar la etapa de progresión en la que se encuentran las niñas (instrumentan la progresión).

Las tablas 3 y 4 muestran ejemplos del análisis de las respuestas de la EPM-14, perteneciente al grupo 0.

Tabla 3.
Ejemplo de análisis de respuestas de la EPM-14 al caso de Ana

Extractos de respuestas del EPM-14	*Comentario analítico*
Problema de los bizcochos. En este problema, Ana, al dibujar los datos del problema, ha ido sumando el número de paquetes de azúcar que puede utilizar hasta llegar al resultado final con los tres paquetes y medio de azúcar que tiene que utilizar.	El EPM describe la resolución, pero no indica la denominación de la estrategia. El EPM señala que Ana ha hecho un dibujo que es una característica de la estrategia de modelación directa. De la frase «ha ido sumando el número de paquetes de azúcar que puede utilizar hasta llegar al resultado final», se podría inferir que reconoce que va sumando cada unidad fraccionaria (3/4).
Problema de las empanadas. Ana ha realizado dos columnas, una con el número de niños y otra con los trozos de empanada. Este problema lo ha resuelto sumando dos a cada trozo de empanada hasta llegar al resultado final.	El EPM describe la resolución sin indicar la denominación de la estrategia. Además, no ha relacionado «sumando dos de cada trozo de empanada» con el hecho de que se trata de sumar la unidad fraccionaria (2 quintos), y no ha indicado que utiliza una representación simbólica, que son características de la estrategia de adición repetida.
Problema de las pizzas. Este problema Ana lo ha resuelto de la siguiente manera: Ha dibujado las 7 pizzas y 1/2 y las ha ido agrupando hasta conseguir el resultado final: que podía poner 3/4 de pizza en 10 mesas.	El EPM describe la resolución sin indicar la denominación de la estrategia. Reconoce una de las características de la estrategia de modelización directa al indicar que ha hecho un dibujo (3/4 de pizza). De la frase «ha ido agrupando hasta conseguir el resultado final» se podría inferir que ha identificado que va sumando cada unidad fraccionaria (3/4 de pizza).
Interpretación de la etapa de Ana. Ana ha resuelto los problemas sin tener que realizar ninguna operación matemática, sino de manera pictórica y agrupando. Se encuentra en la etapa II, estrategia de agrupamiento y combinación, porque su manera de resolver problemas es pictórica, pero a su vez también agrupada.	No ha identificado correctamente la etapa en que se encuentra Ana, pues indica que se encuentra en la etapa II. Su justificación se hace utilizando como características el uso de dibujos (problemas de los bizcochos y de las empanadas) y la agrupación (problema de las pizzas).

Tabla 4.
Ejemplo de análisis de respuestas del EPM-14 al caso de Sara

Extractos de respuestas del EPM-14	*Comentario analítico*
Problema de los bizcochos. Lo ha resuelto de manera combinada, indicando en primer lugar los bizcochos que puede hacer y después el azúcar que puede utilizar. Primero realiza las operaciones hasta 4 bizcochos y, a continuación, las de los dos últimos bizcochos que puede hacer.	El EPM describe la estrategia indicando la relación entre las cantidades (bizcocho y azúcar), pero sin señalar explícitamente las operaciones usadas (adición, multiplicación o ambas), lo que podría ayudarle a diferenciar las estrategias usadas. Ha indicado que Sara «lo ha resuelto de manera combinada», de lo que inferimos que se refiere a la estrategia de agrupamiento y combinación. Sin embargo, Sara usó una estrategia constructiva aplicando una relación de proporcionalidad.
Problema de las empanadas. Este problema lo ha intentado realizar de manera multiplicativa, pero finalmente lo ha resuelto de manera simbólica y agrupada, realizando una operación matemática para llegar al resultado final. Sara ha sumado los 5 trozos de empanada tres veces.	Describe de manera general la estrategia usada. Ha indicado que Sara «finalmente lo ha resuelto de manera simbólica y agrupada», de lo que inferimos que se refiere a la estrategia de agrupamiento y combinación, que es la que utilizó Sara. De la frase «Sara ha sumado los 5 trozos de empanada tres veces», se infiere una característica de esta estrategia: agrupar y contar conjuntos de fracciones (en este caso 5 grupos de 2/5) con la idea de que, con este agrupamiento, se tenga un número entero (2 empanadas para 5 niños).
Problema de las pizzas. Sara lo ha resuelto de manera combinada realizando una tabla con dos columnas. En una aparecen los trozos de pizza y en la otra las mesas en las que puedo poner 3/4 de pizza. Lo ha resuelto sumando de dos en dos las mesas y realizando operaciones en la columna de las pizzas hasta llegar al resultado final.	Ha indicado de manera general que Sara «lo ha resuelto de manera combinada», de lo que inferimos que se refiere a la estrategia de agrupamiento y combinación. Sin embargo, Sara usó una estrategia constructiva aplicando una relación de proporcionalidad. Con la frase «lo ha resuelto sumando de dos en dos las mesas y realizando operaciones en la columna de las pizzas hasta llegar al resultado final», muestra la relación entre las cantidades, que es una característica de las estrategias de agrupamiento y combinación, «contar conjuntos de fracciones», pero sin indicar que su finalidad es tener un número entero de grupos con este agrupamiento de fracciones.
Interpretación de la etapa de Sara. Sara ha resuelto los problemas de manera agrupada o combinada, en algunos casos de manera multiplicativa y en otros de manera pictórica y realizando operaciones matemáticas. Sara se encuentra en la última etapa, estrategias multiplicativas, porque, aunque también utiliza la estrategia de agrupamiento y combinación, cuando realiza las operaciones lo hace de manera multiplicativa.	Ha identificado correctamente que Sara se encuentra «en la última etapa de estrategias multiplicativas». Lo justifica diciendo que «cuando realiza las operaciones lo hace de manera multiplicativa»; sin embargo, esta justificación no se apoya en la identificación de las tres estrategias usadas por la niña, pues se puede inferir que identificó las tres estrategias como de «agrupamiento y combinación» y solo se refirió a la multiplicación (idea de proporcionalidad) al identificar el primer intento de Sara en el problema de las empanadas.

La EPM-14 describe de manera general las estrategias usadas por las niñas, lo que le impide reconocer diferencias en las respuestas. En este tipo de respuestas no se usa la información proporcionada por la PE, por lo que la EPM-14 la considera un artefacto. En el caso de Ana no ha evidenciado las características de las estrategias en todos los problemas, en particular la de adición repetida en el problema de las empanadas, y no ha dado el nombre de la estrategia en ninguno de los problemas. Esta manera de describir las respuestas de Ana le impide interpretar correctamente la etapa en la que se encuentra. En el caso de Sara, tampoco ha evidenciado las características de todas las estrategias usadas por Sara, en particular las multiplicativas. Ha interpretado la etapa en la que se encontraba sin que su justificación estuviese apoyada en el tipo de estrategias usadas por Sara.

En la siguiente sección presentamos los resultados después de agrupar a los EPM según la manera como usaban la información proporcionada por la PE para interpretar las resoluciones de las niñas.

RESULTADOS

Los resultados se presentan en tres secciones correspondientes a los tres grupos en los que se han caracterizado las respuestas de los EPM en función del uso que estos hacen de la PE: Grupo 0 (G0): No usan la información proporcionada para interpretar la etapa de progresión en la que se encuentran las niñas (PE como artefacto). Grupo 1 (G1): Usan algunas características de la información proporcionada para interpretar la etapa de progresión en la que se encuentra una de las niñas (construcción de un esquema de acción instrumental). Dentro de este grupo observamos a su vez dos subgrupos: G11 (32 EPM construyen esquemas de acción instrumental para estrategias aditivas, etapa I) y G12 (2 EPM construyen esquemas de acción instrumental para estrategias multiplicativas, etapa III). Grupo 2 (G2): Usan toda la información proporcionada para interpretar la etapa de progresión en la que se encuentran las niñas (instrumentación de la progresión) (figura 3).

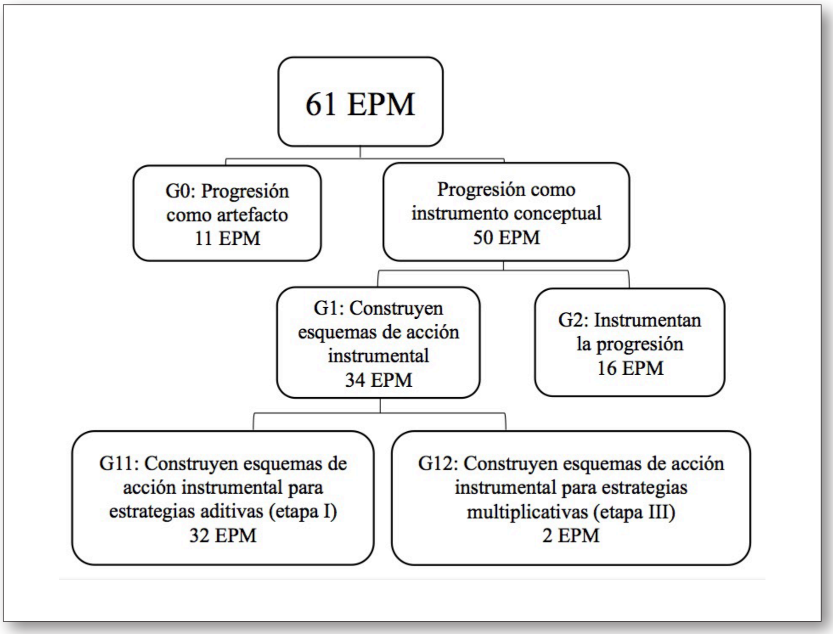


Fig. 3. Grupos de EPM caracterizados por el uso de la PE.

Grupo 0. No usan la información proporcionada para interpretar la etapa de progresión en la que se encuentran las niñas (progresión de estrategias como artefacto)

De los 61 EPM que participaron en la investigación, 11 no usaron la PE para identificar todas las estrategias de ninguna de las dos niñas. En estos casos consideramos que la PE desempeña un papel de artefacto. Por ejemplo, el EPM-14 descrito en la sección de análisis (tablas 3 y 4).

Grupo 1. Usan algunas características de la información proporcionada para interpretar la etapa de progresión en la que se encuentra una de las niñas (construcción de un esquema de acción instrumental)

Usan algunas características de la información proporcionada 34 de los 61 EPM: los que usan únicamente la PE correspondiente a las estrategias aditivas (etapa I) y los que usan únicamente la PE correspondiente a las estrategias aditivas (etapa II) y multiplicativas (etapa III). Al primer subgrupo (G11) pertenecen 32 EPM que usaron la progresión para identificar las estrategias (modelización y adición repetida) e interpretar la etapa de progresión en la que se encontraba Ana (etapa I). De estos 32 EPM, 23 usaron la PE para identificar una o dos de las estrategias utilizadas por Sara (agrupamiento y combinación y/o multiplicativas) y los 9 restantes no identificaron ninguna de las estrategias de Sara.

Esto les impidió interpretar la etapa de comprensión en la que se encontraba. Al segundo subgrupo (G12) pertenecen dos EPM que utilizaron la PE para identificar las estrategias usadas por Sara e interpretar que esta niña se encontraba en la etapa III de la progresión. Sin embargo, solo usaron la PE para identificar alguna de las estrategias utilizadas por Ana.

En G1 encontramos al EPM-24, que construyó un esquema de acción instrumental para las estrategias aditivas (etapa I) al usar la PE para identificar las características de las estrategias usadas por Ana e interpretar que se encontraba en la etapa I. Este EPM reconoce la diferencia entre las estrategias de modelización directa y adición repetida, al identificar las estrategias de modelización en el problema de los bizcochos e indicar sus características:

> Al observar la manera de resolver este problema [P1-bizcochos], nos damos cuenta de que Ana se encuentra en la primera etapa que Empson y Levi han denominado modelización, en la que el alumno se apoya en una representación gráfica para así poder resolver el problema. Una vez que Ana tiene claros estos conceptos repite el proceso seguido al saber que cada parte de las divididas está asociada a un bizcocho. Por tanto realiza un conteo de manera mental apoyándose en la visualización de su propio dibujo y comienza el conteo de bizcochos por cada parte en que se divide de manera congruente el paquete de azúcar.

En el problema de las empanadas, indica que «Ana realiza un proceso similar al anterior. Es verdad que ya no necesita de una representación gráfica y dividir las 6 empanadas en 5 partes congruentes», e identifica esta estrategia como adición repetida:

> En este problema observamos que Ana realiza un proceso similar al anterior [P1-bizcochos]. Es verdad que ya no necesita de una representación gráfica y dividir las 6 empanadas en 5 partes congruentes, es decir, iguales. Sino que sabe que, al tener 6 unidades, van a quedar divididas en 30 partes iguales. Por tanto, Ana, mediante la adición repetida (que Empson y Levi consideran dentro de la primera etapa), establece una relación entre las 30 partes que hay y el número de niños.

Sin embargo, el EPM-24, en el caso de Sara, consideró la PE como artefacto, al señalar que las estrategias utilizadas por Sara en los problemas P1-bizcochos y P3-pizzas pertenecían a las etapas I y II, «entre la primera y segunda etapa», en lugar de ser multiplicativas, etapa III. Además, no tiene clara la diferencia entre la primera y la segunda etapa, en particular entre las estrategias «adición repetida» y de «agrupamiento y combinación», al indicar en P1-bizcochos que «es capaz de realizar la adición repetida» y «comienza a agrupar y realizar combinaciones aditivas»:

> Sara [en P1-bizcochos] se encuentra entre la primera y segunda etapa, ya que es capaz de realizar la adición repetida (de manera mental) hasta llegar al conocimiento de que con tantos paquetes realiza un número exacto de bizcochos. En ese momento Sara se da cuenta y dice, si con tantos paquetes realizo tantos bizcochos (comienza a agrupar y realizar combinaciones aditivas) con otros tantos paquetes realizaré más bizcochos. Y así resuelve Sara los problemas, mediante una serie de adiciones hasta llegar a la unidad completa, sin necesidad de realizar la representación icónica.

Este EPM tampoco ha indicado la denominación de la estrategia usada por Sara en el problema de las empanadas, aunque sí explicita el agrupamiento que realiza esta: «Sara observa que puede repartir 2 empanadas a 5 niños», así como la utilización del agrupamiento que hace para calcular el número de niños, lo cual es propio de la estrategia de agrupamiento y combinación. Por otra parte, parece que solo identifica la primera etapa por emplear una representación icónica:

> En el problema de las empanadas observamos que a Ana le ha costado realizarlo por adición repetida […] por lo que recurre a la primera etapa (icónica) para realizar una representación y dividir en partes congruentes 2 empanadas. Sara observa que puede repartir 2 empanadas a 5 niños (al quedar divididas en 5 partes y repartir 2 a cada niño). Aquí establece un patrón y dice si para cada 5 niños emplea 2 empanadas, tendrá

> que realizar un agrupamiento de 2 en 2 hasta llegar a 6 empanadas, y por cada 2 empanadas habrá 5 niños, por tanto 2 + 2 + 2 = 6 empanadas y 5 + 5 + 5 = 15 niños en total.

Este EPM, coherentemente con la identificación de estrategias realizada en la resolución de los tres problemas, interpretó incorrectamente que Sara estaba en la etapa II. Por otra parte, identificó hacer una representación icónica con la etapa I, indicando la finalidad de la representación propia de una estrategia de la etapa II y no de la etapa I:

> Sara ha resuelto todos los problemas mediante la adición repetida y al llegar al descubrimiento de la unidad, comienza a agrupar y combinar adiciones para llegar al resultado final, por lo que Sara se encuentra en la etapa II de combinación y agrupamiento. También observamos que la primera etapa (icónica) la domina a la perfección, puesto que en el problema 2, solo ha necesitado de 2 dibujos y dividirlos en partes iguales para establecer una relación y resolver el problema.

Grupo 2. Usan toda la información proporcionada para interpretar la etapa de progresión en que se encuentran las niñas (instrumentación de la progresión)

De los 61 participantes, 16 EPM identificaron las estrategias de Sara y Ana mediante la información proporcionada en la PE, lo que les permitió interpretar el nivel de progresión en el que se encontraban las niñas. Por tanto, estos EPM instrumentan la PE. Sus respuestas muestran la construcción de dos esquemas de acción instrumental, uno para las estrategias aditivas (etapa I) y otro para las multiplicativas (etapa III), para interpretar en qué etapa de la PE se encuentran las dos niñas.

Así, la EPM-42 identificó con detalle las resoluciones de las niñas y reconoció la diferencia entre estas, lo que le permitió justificar la etapa en la que se encontraban. En relación con las estrategias usadas por Ana, la EPM-42 justificó las estrategias de modelización directa indicando que «hace divisiones congruentes […] y finalmente cuenta hasta llegar al resultado pedido», y la estrategia de adición repetida señalando evidencias observadas. Además, interpretó que Ana se encontraba en la etapa I:

> Tras haber analizado los tres problemas resueltos por Ana, puedo deducir que está en la etapa I ya que en las resoluciones ha hecho uso dos veces de la modelización directa y una de ellas de la adición repetida. En cuanto a la modelización directa lo ha hecho de forma correcta ya que hace divisiones congruentes y representa lo que el problema le pide, y finalmente cuenta hasta llegar al resultado pedido. En cambio, en la adición repetida, únicamente ha representado en el papel, de forma simbólica, el numerador de la fracción, aunque ella realmente sabía lo que significaba ya que en la parte superior señala «30 quintos». En la columna de la derecha realiza una adición repetida de 2/5, aunque no hace uso de forma explícita de números mixtos, y además únicamente muestra el numerador. Me ha llamado mucho la atención ya que en el enunciado nos informaban de que en total tenía 6 empanadas y Ana tras realizar una adición repetida ha sabido cuándo debe parar y ha sido en 30, que realmente son 30/5, y ella ha asociado 30/5 = 6, esto es un dato implícito, pero es importante diagnosticarlo.

Respecto al caso de Sara, la EPM-42 identificó las estrategias usadas mostrando las características matemáticas que diferenciaban las resoluciones realizadas:

> En cuanto a la resolución del problema [P1-bizcochos] hace uso de la proporcionalidad y lo hace pensando y no de manera mecánica. En el problema [P2-empanadas] Sara comenzó haciendo una adición repetida pero no obtuvo lo que realmente pedían. Por lo tanto, se respaldó en una representación icónica, pero buscando un patrón, es decir, representa las 6 empanadas, pero cuando encuentra que 2 empanadas dan para 5 niños, deja de seguir contando y hace uso de agrupamientos y combinaciones. La resolución del problema [P3-pizzas] es similar al de los bizcochos, aunque en mi opinión, el pensamiento matemático en este caso es mayor. Digo esto ya que hace uso de la proporcionalidad y en primer lugar relaciona que con 3/4 de pizza tiene para 1 mesa, entonces para 2 mesas tendrá ¾ · 2 = 6/4 = 1 + 2/4, donde la alumna representa únicamente 1 + 2/4 pizzas. A continuación, vuelve a multiplicar por el doble: (6/4) · 2 = 12/4 = 3, donde vuelve a reflejar de nuevo el número final (3). Y para finalizar tiene 6 pizzas con las que puede obtener 8

mesas; como le quedan 1 pizza y media, vuelve a mirar datos anteriores donde 1 pizza y media son 2 mesas. En este caso vuelve a hacer uso de fracciones equivalentes como en el problema de los bizcochos.

Para interpretar la etapa en la que se encontraba Sara, la EPM-42 miró globalmente sus respuestas, sin dejarse influenciar por una respuesta en particular:

Dos de los tres problemas los ha resuelto mediante el uso de un patrón y partiendo de ello hace uso de agrupamientos y combinaciones con estructuras multiplicativas. En cambio, en uno de ellos [P2-empanadas] lo representa de manera icónica, pero es capaz de encontrar un patrón y a partir de ahí crear un agrupamiento y combinaciones. Puedo afirmar que en global se encuentra en la fase III ya que es capaz de resolver y comprender un problema mediante la proporcionalidad, aunque la resolución del problema de las empanadas fuese distinta.

La EPM-42, a la hora de justificar el nivel de progresión de Ana y Sara, utilizó correctamente el vocabulario específico (a excepción del término «adición repetida», que utilizó como sinónimo de «sumas sucesivas»). Aportó evidencias y, si añadía algo que no aparecía en las respuestas de Ana y Sara, lo explicitaba indicándolo con las siguientes expresiones:

Esto es un dato implícito, pero es importante diagnosticarlo.

La resolución del problema [P3-pizzas] es similar al de los bizcochos, aunque, en mi opinión, el pensamiento matemático en este caso es mayor.

Digo esto ya que hace uso de la proporcionalidad y en primer lugar relaciona que con 3/4 de pizza tiene para 1 mesa, entonces para 2 mesas tendrá $3/4 \cdot 2 = 6/4 = 1 + 2/4$, donde la alumna representa únicamente $1 + 2/4$ pizzas.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo varios EPM hacen uso de una PE de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida como instrumento conceptual para interpretar el pensamiento matemático de los niños. Hemos utilizado una adaptación de la idea de génesis instrumental (Rabardel, 1995) para estudiar cómo los EPM usan la información de una PE al interpretar las respuestas a problemas de división-medida usando fracciones. La adaptación de la idea de génesis instrumental nos ha permitido identificar tres características sobre cómo los EPM usan un conocimiento teórico para dar sentido al pensamiento matemático de los estudiantes, como un rasgo del desarrollo de las destrezas de identificar e interpretar de la competencia docente «mirar profesionalmente». De nuestros resultados inferimos dos conclusiones: (i) sobre la progresión paulatina de la instrumentación de la información sobre el pensamiento de los estudiantes, y (ii) sobre la generación de indicadores del desarrollo de las destrezas de identificar e interpretar.

Uso de la información sobre la progresión de estrategias de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida

La instrumentación de una PE por parte de los EPM implica usar la información proporcionada para identificar estrategias e interpretar la etapa de progresión de niños de Educación Primaria. Los resultados han mostrado que el 26,2 % de los EPM (16 de 61) han llegado a la instrumentación de la PE, lo que indica la dificultad del proceso de instrumentación de dicha información. En particular, el 55,7 % (34 de 61) de los EPM solo pudieron identificar algunas características de la PE, siendo las más difíciles de reconocer las vinculadas a las estrategias multiplicativas (32 de 34), donde subyacen las nociones de razón y de proporción. Esta dificultad se debe a que algunos EPM identifican como estrategia de agrupamiento y combinación las estrategias multiplicativas constructivas. Esta dificultad podría ser debida a que en ambas estrategias aparecen sumas sucesivas de fracciones hasta conseguir el todo, pero con distinta finalidad. En el caso del agrupamiento y combinación, se usan las sumas para agrupar fracciones con la idea de tener un número entero y así poder utilizar estos agrupamientos para contar el número de grupos. En cambio, en las estrategias multiplicativas constructivas se usan varias relaciones de proporcionalidad y se suman sucesivamente.

Nuestros datos indican que algunos EPM no reconocieron la diferencia entre las distintas estrategias usadas por las niñas (progresión como artefacto), y en consecuencia no establecieron relación entre el conocimiento de matemáticas (estrategias aditivas y multiplicativas) y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes (características de las estrategias aditivas o multiplicativas usadas por las niñas). En cambio, otros reconocieron la diferencia entre las estrategias usadas por las niñas, identificando algunas características de la información proporcionada, pero no todas (construcción de un esquema de acción instrumental), o todas las características (instrumentación de la PE) estableciendo la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. Estos resultados están en consonancia con los obtenidos en otras investigaciones en las que se han usado trayectorias o progresiones de aprendizaje para el desarrollo de la mirada profesional sobre el pensamiento matemático de los estudiantes (Edgington et al., 2016; Fernández et al., 2018; Ivars et al., 2019; Wilson et al., 2013; Wilson et al., 2015).

Cabe preguntarse si los EPM que han instrumentado la progresión en una aproximación a la práctica (Grossman et al., 2009) serían capaces de instrumentarla en una situación real de aula, donde, como señala Empson (2011, p. 577), «cómo y cuándo –y algunas veces si– que los niños lleguen a entender y usar estas estrategias depende de una serie de factores que varían de una clase a otra y de un niño a otro». Esta autora indica que uno de estos factores es el significado de las fracciones que predomina. Si este significado es la relación parte-todo, los niños privilegiarán el uso de estrategias aditivas, pero si el significado de la fracción es como razón, puede predominar el uso de estrategias multiplicativas; también los niños pueden usar estrategias que no se consideran en esta PE. En futuros trabajos se puede indagar cómo los EPM usan los conocimientos sobre la PE en sus prácticas de enseñanza.

Enfoque instrumental como indicador de la adquisición de las destrezas de identificar e interpretar

El enfoque instrumental nos ha permitido identificar indicadores de la adquisición de las destrezas de identificar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes.

No fueron capaces de adquirir ninguna de estas dos destrezas considerando la PE como un artefacto 11 EPM. Otros 34 EPM adquirieron las destrezas de identificar e interpretar construyendo un esquema de acción instrumental solo para un tipo de estrategias, para las aditivas (etapa I) o para las multiplicativas (etapa III). El resto de EPM (16) adquirieron las destrezas de identificar e interpretar para los dos tipos de estrategias, al instrumentar la PE.

Estos resultados nos permitirían establecer tres niveles de cómo los EPM podrían adquirir las destrezas de identificar estrategias e interpretar etapas de progresión de alumnos de Educación Primaria en problemas de grupos múltiples del tipo división-medida. Estos niveles, al igual que en la investigación de Sánchez-Matamoros et al. (2018), estarían caracterizados por el desarrollo progresivo de distintos esquemas (figura 4).

El primer nivel se caracterizaría por considerar la PE como artefacto (Rabardel, 2002; Verillon y Rabardel, 1995), lo que implica que los EPM no harían uso de la PE para identificar e interpretar.

En este nivel no se adquiriría la destreza de identificar estrategias y, en consecuencia, tampoco la de interpretar la etapa de progresión.

Como transición del primer al segundo nivel, los EPM podrían construir esquemas de uso (Drijvers y Trouche, 2008). En estos esquemas identificarían mostrando evidencias, bien estrategias aditivas de la etapa I, bien estrategias aditivas de la etapa II y multiplicativas de la etapa III de la progresión, pero no las usarían para interpretar la etapa en la que se encuentran los niños. En nuestro caso, los EPM no han construido ningún esquema de uso.

Un segundo nivel se caracterizaría por construir esquemas diferentes de acción instrumental para estrategias aditivas (etapa I), o un esquema de acción instrumental para estrategias multiplicativas (etapa III). La construcción de estos dos esquemas de acción instrumental permitiría a los EPM adquirir las destrezas de identificar estrategias en la resolución de los problemas y de interpretar la etapa en la que se encuentran los niños. Sin embargo, como muestran nuestros resultados, la construcción de estos esquemas puede depender del conocimiento de las matemáticas implicadas. En nuestro caso, a los EPM les ha resultado más fácil construir un esquema de acción instrumental para las estrategias aditivas (etapa I) que para las estrategias multiplicativas (etapa III).

Como transición del segundo al tercer nivel, los EPM podrían construir un esquema de uso para las estrategias aditivas y multiplicativas indicando evidencias, pero sin utilizarlas para interpretar la etapa de progresión en la que se encuentran todos los niños. En nuestra investigación no se ha construido ningún esquema de este tipo.

El tercer nivel se caracteriza por usar la información sobre PE para identificar las diferentes estrategias aditivas y multiplicativas e interpretar la etapa de progresión en la que se encuentran los niños.

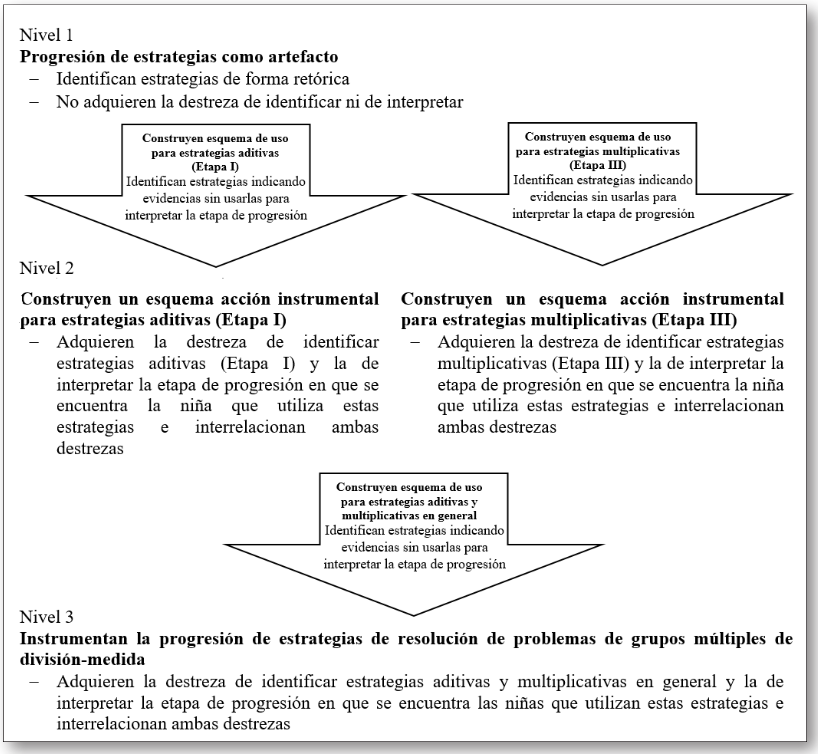


Fig. 4. Niveles de adquisición de las destrezas de identificar e interpretar a partir del uso de la progresión de estrategias como instrumento conceptual.

La instrumentación de la información relativa a la PE de resolución de problemas de grupos múltiples ha ayudado a los EPM a superar la dificultad de interpretar las respuestas de los niños cuando estas son distintas a las que ellos darían a los problemas (Fernández et al., 2012; Jacobsen, Ribeiro y Mellone, 2014) o cuando los niños no siguen el procedimiento tradicional (Son y Crespo, 2009). Nuestra investigación sugiere que proporcionar a los EPM información sobre la PE de resolución de problemas de grupos múltiples del tipo división-medida (Empson y Levi, 2011) les permite tener un vocabulario específico para nombrar las diferencias entre las estrategias, lo que los ayuda a identificar las estrategias empleadas e interpretar las etapas de progresión.

RECONOCIMIENTOS

La participación de M. Luz Callejo y Julia Valls en esta investigación se realiza a través del proyecto EDU2017-87411-R, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO), Gobierno de España.

REFERENCIAS

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144. https://doi.org/10.2307/749140

Carpenter, T., Fennema, E., Franke, M., Levi, L. y Empson, S. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Porstmouth, NH: Heinemann.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, *47*, 82-92. https://doi.org/10.1016/j.tate.2014.12.009

Drijvers, P., Kieran, C. y Mariotti, M. A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. En C. Hoyles y J. B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain* (pp. 89-132). Nueva York: Springer.

Drijvers, P. y Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. En G. W. Blume y M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*. Vol. 2. *Cases and perspectives* (pp. 363-392). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Edgington, C., Wilson, P. H., Sztajn, P. y Webb, J. (2016). Translating Learning Trajectories into useable tools for teachers. *Mathematics Teacher Educator*, *5*(1), 65-80. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.5.1.0065

Empson, S. B. (2011). On the idea of learning trajectories: Promises and pitfalls. *The Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 571-598. https://scholarworks.umt.edu/tme/vol8/iss3/6

Empson, S. B. y Jacobs, V. (2008). Learning to listen to children's mathematics. En T. Wood y P. Sullivan (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education*. Vol. 1. *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp. 257-281). Róterdam: Sense Publishers.

Empson, S. B. y Levi, L. (2011). *Extending children's mathematics: Fractions and decimals*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Fernández, C., Callejo, M. L. y Márquez, M. (2012). Valoración de respuestas a problemas de división-medida con fracciones por estudiantes para maestro. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 219-227). Jaén: SEIEM.
https://studylib.es/doc/5939889

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *13*, 39-61.
https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229

Graeber, A., Tirosh, D. y Glover, R. (1986). Preservice teachers' beliefs and performance on measurement and partitive division problems. En G. Lappan y R. Even (Eds.), *Proceedings of the Eighth Annual Psychology of Mathematics Education – North America Conference* (pp. 262-267). East Lansing, MI.

Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E. y Williamson, P. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. *Teachers College Record*, *111*(9), 2055-2100. https://www.tcrecord.org/Content.asp?ContentId=15018

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2019). A learning trajectory as a scaffold for preservice teachers' noticing of students' mathematical understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-20.
https://doi.org/10.1007/s10763-019-09973-4

Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202. https://www.jstor.org/stable/20720130

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M. y Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *19*(3-4), 135-150. https://www.researchgate.net/publication/307558474

Li, Y. y Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: The case of fraction division. *ZDM*, *40*(5), 833-843.
https://doi.org/10.1007/s11858-008-0148-2

Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, *26*, 31-51. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854003

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains*. París: Armand Colin.

Rabardel, P. (2002). *People and technology. A cognitive approach to contemporary instruments*. Université Paris 8. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01020705

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Pérez-Tyteca, P. y Callejo, M. L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(2), 203-228.
https://doi.org/10.12802/relime.18.2124

Son, J. y Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*(4), 235-261.
https://doi.org/10.1007/s10857-009-9112-5

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 129-162.
https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_4

Steinberg, R., Empson, S. y Carpenter, T. (2004). Inquiry into children mathematical thinking as a means to teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *7*(3), 237-267. https://doi.org/10.1023/B:JMTE.0000033083.04005.d3

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H. y Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction toward a theory of teaching. *Educational Researcher*, *41*(5), 147-156. https://doi.org/10.3102/0013189X12442801

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions environments: Guiding student's command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*(3), 281-307. https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-60). Albany, NY: SUNY Press.

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10*(1), 77-101. https://doi.org/10.1007/BF03172796

Wilson, P. H., Mojica, G. F. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 103-121. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.12.003

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C. y Myers, M. (2015). Teachers' uses of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education*, *66*(3), 227-244. https://doi.org/10.1177/0022487115574104

Instrumentation of a progression of strategies by prospective primary teachers

Eloísa Montero
Didáctica de las Matemáticas. Escuni Centro Universitario de Magisterio. Madrid (España)
emontero@escuni.es

María Luz Callejo, Julia Valls
Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante. Alicante (España).
luz.callejo@ua.es, julia.valls@ua.es

The aim of this research is to characterize how prospective primary teachers (PPT) make use of a progression of multiple-division problem solving strategies as a conceptual instrument to interpret children's mathematical thinking. Learning trajectories have been used to favor the development of the competence that consists in professionally noticing primary students' mathematical thinking.

Our theoretical framework is made of three interrelated ideas: a progression of solving strategies, professional noticing of students' mathematical thinking and the instrumental genesis theory. By means of the instrumental genesis, we will characterize how PPT use the progression of strategies as a guide for the professional noticing of primary students' mathematical thinking.

61 PPT enrolled in a subject during their third schoolyear participated in a teaching experiment whose purpose was to develop the teaching competence of professional noticing primary children's mathematical thinking when solving measurement division problems with fractions. The module consisted of nine sessions of two hours. In the first session, PPT solved a division-measure problem and were asked to anticipate two hypothetical responses of primary school children. During the following sessions PPT used the progression of solving strategies proposed by Empson and Levi (2011) to identify and interpret different primary students' solving strategies. During the eighth session, PPT did an evaluation task, while, in the ninth session, their answers were reviewed.

The data of this research consist of the answers to the evaluation session (eighth) in which PPT were asked to identify and interpret the solutions to three different problems solved by two primary students, Ana and Sara, who used solving strategies with different characteristics. Ana showed additive strategies, while Sara presented mainly multiplicative strategies. The use of the progression of strategies by the PPT was analyzed by means of the instrumental approach to characterize how they identified and interpreted strategies as used by children.

The results show three different groups of PPT, according to their use of the progression of strategies: i) Group 0, those who did not use the progression to interpret the stage of the progression in which both students were when solving problems, thus considering it an artifact; ii) Group 1, those who used certain characteristics of the progression to interpret the stage of the progression in which one of the students was, and so generated instrumental action schemes; iii) Group 2, those who used all the information to interpret the stages in which both students were, and therefore instrumented the progression.

The instrumentation of a progression of strategies by the PPT implies using the received information to identify such strategies and interpret the stage of the progression in which primary students were. Results show that only 26.2 % of PPT instrumented the progression of strategies, illustrating the difficulty of the process of instrumenting such information.