



Habilidades de visualización de estudiantes con talento matemático: comparativa entre los test psicométricos y las habilidades de visualización manifestadas en tareas geométricas

Visualization abilities of mathematically gifted students: a comparison between the results from psychometric tests and the visualization abilities used for geometrical tasks

Rafael Ramírez Uclés, Pablo Flores Martínez
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
Facultad de Ciencias de la Educación. Campus Universitario de la Cartuja.
rramirez@ugr.es, pflores@ugr.es

RESUMEN • De la revisión de las investigaciones se desprende que no hay una postura unificada en la relación entre talento matemático y visualización. Un factor que se ha de considerar es la diversidad de instrumentos utilizados para caracterizar la visualización. En este trabajo se comparan los resultados obtenidos en dos test visuales con las habilidades de visualización puestas en juego en tres sesiones de enriquecimiento curricular. Los resultados de un grupo de 25 estudiantes que participan en un proyecto de estimulación del talento matemático no evidencian relación entre la visualización manifestada en los test y el uso de las habilidades de visualización registrado en la resolución de tareas geométricas.

PALABRAS CLAVE: visualización; talento matemático; habilidades de visualización; test PMA; test DAT.

ABSTRACT • Based on a review of the research, we observe that there is not a single opinion about the relationship between mathematical gift and visualization. One factor to be considered is the variety of instrument used to characterize the visualization. In this paper we compare the results from two visual tests with the visualization abilities shown in three curricular enrichment sessions. The results from a group of 25 students participating in a project for enrichment of the mathematical giftedness do not show any relationship between the visualization abilities shown in the tests and the visualization techniques used to solve geometrical tasks.

KEYWORDS: visualization; mathematical giftedness; visualization abilities; PMA test; DAT test.

Recepción: julio 2016 • Aceptación: mayo 2017 • Publicación: junio 2017

Ramírez Uclés, R., Flores Martínez, P., (2017). Habilidades de visualización de estudiantes con talento matemático: comparativa entre los test psicométricos y las habilidades de visualización manifestadas en tareas geométricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 35.2, pp. 179-196

INTRODUCCIÓN

La definición del talento aparece estrechamente relacionada con el concepto de superdotación, incluso llegando a considerar sinónimos términos como talento, superdotado y altas capacidades (Mönks y Mason, 2002). Aunque no necesariamente debe ir acompañado de alto rendimiento académico, se entiende el estudiante con talento matemático como aquel que, en virtud de unas habilidades sobresalientes, es capaz de alcanzar este rendimiento en el ámbito matemático (Passow, 1993). En la definición de talento matemático, se atribuyen a los estudiantes unas aptitudes, capacidades o habilidades por encima de la media en el área específica de las matemáticas (Johnsen, 2004; Kaufman y Sternberg, 2010; Tannenbaum, 2003). Aunque existen diferencias para concretar estas características (Davis, Rimm y Siegle, 2011; Greenes, 1981; Miller, 1990), no difieren esencialmente de las propuestas por Freiman (2006), que, entre otras, señala que el estudiante con talento matemático localiza la clave de los problemas, produce ideas originales, valiosas y extensas, mantiene bajo control los problemas y su resolución, presta atención a los detalles y desarrolla estrategias eficientes.

El papel de la visualización en las características del talento ha sido abordado desde diferentes perspectivas. Por un lado, numerosos autores han destacado la importancia de la visualización en las tareas de matematización (Arcavi, 2003; Clements y Battista, 1992; Guillén, 2010; entre otros), resaltando el papel que la visualización ha supuesto en la obra de grandes matemáticos (Hadamard, 1947) y vinculándola estrechamente con el éxito en las denominadas disciplinas STEM (ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas) (Uttal *et al.*, 2013; Wai, Lubinski y Benbow, 2009). Desde esta perspectiva de cualidad para afrontar tareas matemáticas, la visualización supone la habilidad para interpretar y comprender la información proveniente de figuras que se usan en el trabajo geométrico y la habilidad para contextualizar y trasladar las relaciones abstractas y la información no figural en términos visuales (Ben-Chaim y Lappan, 1989).

Por otro lado, de los resultados de las investigaciones no se deduce una postura unificada sobre la relación entre la visualización y la caracterización del talento. Esta diversidad de resultados ha sido recogida en amplias revisiones de investigaciones clásicas sobre visualización (Bishop, 1980; Lean y Clements, 1981), concluyendo que pocas dan resultados definitivos sobre la relación entre habilidad espacial y rendimiento matemático y señalando la dificultad de registrar la actividad de visualización. Destacan los estudios pioneros de Krutetskii (1976), que concluyen que la habilidad para los conceptos espaciales y la habilidad para visualizar relaciones matemáticas abstractas no son componentes obligatorias en las habilidades de los sujetos con talento matemático.

Posteriormente, Presmeg (1986) utiliza el perfil general de la estructura de la habilidad matemática de los individuos en edad escolar presentado por Krutetskii para señalar la preferencia de los estudiantes con talento por los métodos no visuales. Incluso empleando un método de enseñanza visual, no siempre consiguió que los estudiantes visualizadores superasen sus dificultades e hicieran un uso óptimo de la fuerza de su procesamiento visual.

Sin embargo, en investigaciones más recientes, se muestran evidencias significativas de la relación entre la habilidad de percepción visual y la habilidad matemática (Rabab'h y Veloo, 2015; Rivera, 2011). En diferentes contextos, las investigaciones han encontrado relaciones entre las características del talento matemático y los elementos que constituyen la visualización (tabla 1).

Tabla 1.
Relación entre talento y habilidades de visualización, según diferentes investigaciones

<i>Sujetos</i>	<i>Medida de visualización/instrumentos</i>	<i>Resultados</i>
Test WISC-R (22 estudiantes talentosos). 66 estudiantes de sexto grado.	Número de representaciones pictóricas o esquemáticas. Número de representaciones visuales utilizadas. Test de habilidad espacial.	Los estudiantes con talento puntúan mejor en las dos medidas espaciales de visualización. El uso de imágenes esquemáticas correlaciona significativamente y positivamente con el alto rendimiento en cada medida de visualización espacial (Van Garderen, 2006).
Estudiantes de un programa de talento. 3 estudiantes de 12 años y 3 estudiantes de 14 años.	Habilidad para reconocer relaciones entre las componentes. Respuestas y entrevistas mientras realizaban las tareas de construcción de poliedros.	En la definición de conceptos matemáticos, la habilidad para reconocer relaciones favorece la generalización y la justificación (Lee, Kim, Na, Han y Song, 2007).
Estudiantes de un programa de talento. 7 estudiantes con talento (13 y 14 años).	Habilidades de visualización (entrevistas).	Dos de los siete mostraron características de las habilidades de visualización y los otros cinco mostraron dificultades en la manipulación mental del objeto representado en el plano (Ryu, Chong y Song, 2007).
189 estudiantes de sexto (11 y 12 años) preseleccionados para acceder a un programa de estímulo del talento matemático.	Factor espacial del test PMA.	La correlación es significativa y bastante elevada entre los factores espacial y de razonamiento del PMA y la eficiencia en la resolución de problemas (Díaz, Sánchez, Pomar y Fernández, 2008).
18 estudiantes de 13 a 16 años de un programa de atención al talento matemático.	Habilidades y procesos de visualización. Transcripción de las respuestas en problemas de generalización en contextos algebraicos.	La generalización está relacionada con la discriminación visual, la organización de la información con el procesamiento visual y la flexibilidad con la identificación visual (Jiménez, Rojas y Mora, 2011).

Las diferentes conclusiones pueden ser debidas, entre otros factores, a la utilización de diferentes definiciones e instrumentos de medida. Si bien el talento matemático está, de manera generalizada, caracterizado por el rendimiento en tareas de resolución de problemas y por la puntuación en determinados test, la medición de la visualización se ha realizado mediante diferentes instrumentos y está basada en diversos constructos: puntuaciones en test visuales, tipos de imágenes utilizadas, estrategias de resolución visuales utilizadas, habilidades de visualización manifestadas, etc. Se utilizan tanto instrumentos transversales aplicados puntualmente como medidas de visualización en procesos de enseñanza y resolución de tareas.

Con la intención de comprender qué elementos pueden intervenir en esta discrepancia, el objetivo de este trabajo es comparar la visualización de los estudiantes con talento matemático, registrada utilizando herramientas psicométricas, con las manifestaciones de las habilidades de visualización puestas en juego en tres sesiones de enriquecimiento curricular.

MARCO TEÓRICO

Intuitivamente, la visualización se entiende como la acción de generar o completar imágenes sobre fenómenos o conceptos que pueden o no ser gráficos. Esta acción es especialmente interesante en matemáticas, como han señalado Arcavi (2003) y Hadamard (1947). Para conceptualizar la visuali-

zación y hacer operativo su análisis, utilizaremos la caracterización que realiza Gutiérrez (1996), en la que unifica muchos de los desarrollos teóricos elaborados hasta el momento y consigue establecer un marco integrador (Presmeg, 2006). El análisis estructural de Gutiérrez indica que la visualización está integrada por cuatro elementos principales: imágenes mentales, representaciones externas, procesos visuales y habilidades de visualización.

Las representaciones externas son las manifestaciones físicas de un fenómeno, representaciones gráficas o verbales de conceptos o propiedades que incluyen dibujos, esbozos, diagramas, etc., y que ayudan a crear o transformar imágenes mentales y hacer razonamiento visual. Las imágenes mentales son representaciones estables que el sujeto hace de situaciones externas, atendiendo al menos a algunos elementos y características de la situación, son representaciones cognitivas de un concepto o propiedad matemática por medio de elementos visuales o espaciales. Los procesos de visualización son las acciones mentales o físicas en las que están involucradas las imágenes y que el sujeto emplea para transformar una representación externa en una imagen mental o para transformar y actuar con las imágenes mentales para incluirlas en sus razonamientos. Las habilidades de visualización son disposiciones estables del sujeto, desarrolladas a partir de la práctica, que le facilitan llevar a cabo procesos visuales.

Arcavi (2003) aprecia que la visualización supone capacidad, proceso y producto de la actuación sobre representaciones externas figurales. Centramos la atención sobre el análisis de las habilidades de visualización, de las que se ha reconocido su importancia para el aprendizaje geométrico (Bishop, 1980; Hershkowitz, 1990) y que desempeñan un papel relevante al resolver una tarea matemática, interviniendo tanto en los procesos de creación y transformación de imágenes mentales como para relacionar estas con las representaciones externas (Gutiérrez, 1996).

La distinción de habilidades específicas para realizar tareas concretas ha sido frecuente en la investigación psicológica, generalmente basada en estudios factoriales. En relación con la visualización, se han realizado numerosos trabajos, muchos de los cuales emplean las habilidades visuales (Höffler, 2010).

En la tabla 2 se muestran las habilidades psicológicas enunciadas por Del Grande (1990), incluyendo su descripción para apreciarlas en los procesos de visualización con imágenes en geometría (Gutiérrez, 1992; Gutiérrez, 2006).

Tabla 2.
Habilidades de visualización

	Habilidad para
Coordinación ojo-motor (OM)	Coordinar la visión con el movimiento del cuerpo.
Percepción figura-contexto (FC)	Reconocer una figura aislándola de su contexto, en el que aparece camuflada o distorsionada por la superposición de otros elementos gráficos.
Conservación de la percepción (CP)	Reconocer que un objeto mantiene determinadas propiedades (forma, tamaño, textura, etc.) aunque cambie de posición o deje de verse por completo.
Percepción de la posición en el espacio (PE)	Relacionar la posición de un objeto con uno mismo (el observador) o con otro objeto, que actúa como referencia.
Percepción de las relaciones espaciales (RE)	Identificar las relaciones internas entre varios objetos situados simultáneamente en el espacio (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa, etc.).
Discriminación visual (DV)	Comparar dos imágenes (o dos objetos en la misma imagen) e identificar sus semejanzas y diferencias visuales.
Memoria visual (MV)	Recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

Las habilidades visuales nos dan información sobre la forma de utilizar la visualización de los sujetos. Su medida puede hacerse con diversos instrumentos. Los test psicométricos suelen hacer una identificación de habilidades visuales específicas o generales, mediante ítems que requieren una respuesta puntual, en una situación de trabajo individual y con el reto de realizarla en un tiempo dado. Pero también cabe examinar habilidades visuales de sujetos en un proceso de enseñanza, especialmente si este proceso pretende explotar las habilidades de las que disponen los sujetos y suministrar tareas matemáticas escolares que contribuyan a desarrollarlas. Esta ha sido la intención de esta investigación, en la que pretendemos apreciar las habilidades puestas en juego, examinando además cómo van evolucionando conforme avanza el proceso de formación. Para no perder de vista las características psicométricas de los sujetos, hemos realizado también mediciones de la visualización a partir de test estandarizados.

Para analizar la manifestación de las habilidades de visualización que ponen en juego en un proceso de confrontación sistemática con tareas matemáticas que las promueven, trabajando de forma grupal, con la puntuación que alcanzan en test visuales los participantes en este proceso, es necesario operativizar el proceso de recogida de información y la determinación de las variables de estudio. Al considerar que las habilidades de coordinación ojo-motor y de memoria visual están asociadas a técnicas de dibujo y recuerdo respectivamente, que no se abordan en nuestra experiencia, se seleccionan las restantes cinco habilidades, de las siete señaladas por Del Grande (1990) y definidas en la tabla 2.

METODOLOGÍA

Participantes

Los sujetos son 25 estudiantes (20 niños y 5 niñas) del segundo curso del programa ESTALMAT, que es un proyecto para la detección y el estímulo del talento precoz en matemáticas, correspondientes a los cursos escolares de 3.º y 4.º de ESO. El rango de edades es de 13 a 16 años, con una media de 14,5 años. Se aborda un proceso instructivo de enriquecimiento curricular en clases impartidas los sábados por la mañana.

Los estudiantes son seleccionados mediante una prueba de contenidos matemáticos y unas entrevistas realizadas por los profesores del proyecto. Utilizamos el criterio de que los estudiantes que pertenecen a este proyecto tienen talento matemático.

Instrumentos y variables de estudio

Para registrar la visualización mediante herramientas psicométricas, se seleccionaron dos test utilizados en investigaciones relacionadas con la visualización de estudiantes con talento matemático (Ramírez, 2012):

- Factor de relaciones espaciales (SR) de la batería de aptitudes diferenciadas (DAT-5) (Bennett, Seashore y Wesman, 2000). La prueba de relaciones espaciales mide la habilidad para visualizar un objeto en tres dimensiones a partir de un modelo bidimensional e imaginar cómo aparecería este objeto si sufriera una rotación espacial (figura 1).

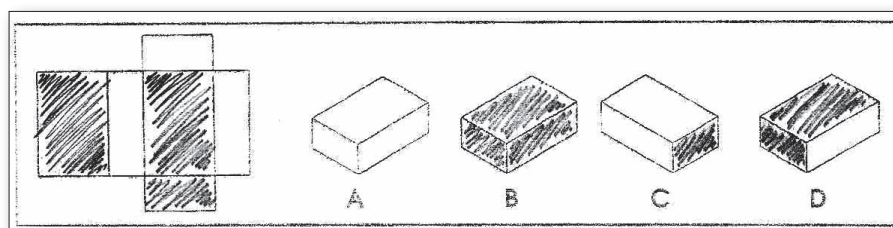


Fig. 1. Ejemplo de ítem del test DAT.

- Factor espacial (E) del test de aptitudes primarias (PMA) (Thurstone y Thurstone, 1976). La prueba de concepción espacial mide la «visualización estática», definida como la «aptitud para interpretar y reconocer objetos que cambian de posición en el espacio, manteniendo su estructura interna» (figura 2).

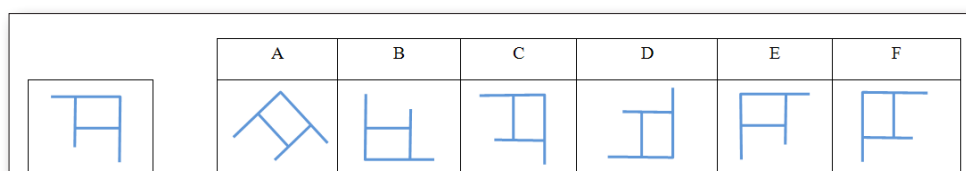


Fig. 2. Ejemplo de ítem del test PMA.

Para registrar la visualización manifestada en las sesiones de enriquecimiento curricular, se observa la presencia de las cinco habilidades de visualización descritas anteriormente en las resoluciones de problemas por los estudiantes.

La recogida de datos se realiza en tres sesiones de enriquecimiento curricular del proyecto ESTALMAT, con una duración de tres horas cada una. Son sesiones dedicadas a la resolución de problemas geométricos que presentan diversas cualidades: aparecen de manera funcional los conceptos matemáticos y la visualización, abordan contenidos que los estudiantes no han tratado en el currículo y promueven al máximo la puesta en juego y el desarrollo de destrezas visualizadoras. En la primera sesión, el contenido matemático son los movimientos en el plano, que se utilizan como herramientas para resolver problemas. La segunda sesión se centra en problemas de relleno del espacio, para lo que tienen que reconocer las propiedades de los poliedros. Finalmente, en la tercera, se estudian analogías y diferencias en tareas en el plano o en el espacio, como por ejemplo estudiar propiedades de un poliedro a partir de su desarrollo plano (Ramírez, 2012). A modo de ejemplo, presentamos una tarea representativa de cada sesión:

- Tarea de la sesión 1. Las siguientes fichas están formadas por tres círculos y por dos segmentos (figura 3).

Se forman estructuras al colocar las fichas en el tablero pudiéndose solapar únicamente círculos de fichas diferentes. No pueden solaparse los segmentos (figura 4).

Construye todas las estructuras posibles formadas por tres fichas. Dos estructuras se consideran iguales si pueden obtenerse una a partir de la otra mediante movimientos en el plano.

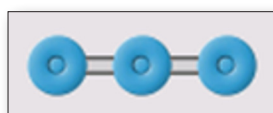


Fig. 3. Ficha para las actividades de la sesión 1.

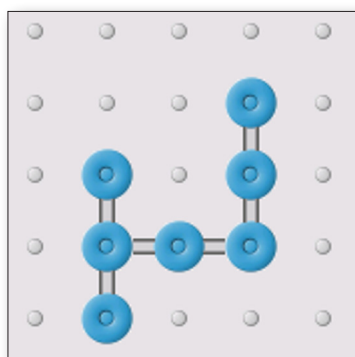


Fig. 4. Ejemplo de estructura formada por tres fichas en el tablero cuadrado.

- Tarea de la sesión 2. Explica qué transformaciones se pueden hacer en un poliedro que rellena el espacio para que el poliedro resultante también lo rellene.
- Tarea de la sesión 3. Busca todos los polígonos que podemos encontrar al seccionar un cubo por un plano. Señala cuáles son regulares y justifica las respuestas.

Para operativizar el análisis de las habilidades de visualización puestas en juego en estas intervenciones, se realiza un análisis de contenido (Krippendorf, 1990) utilizando como unidad de análisis los fragmentos de los textos escritos, que se corresponden con respuestas escritas de los estudiantes o con la correspondiente transcripción de sus intervenciones. Se dispone de los siguientes registros: respuestas de los estudiantes entregadas en las actividades escritas de las sesiones de enriquecimiento, grabaciones de audio de cada sesión y sus transcripciones. Para establecer las categorías de análisis, se realiza un estudio previo de las habilidades de visualización esperadas al resolver la tarea, partiendo de soluciones propuestas por profesores expertos (*categorías a priori*), y se completa con nuevas categorías emergentes, derivadas de las soluciones aportadas por los estudiantes (*categorías a posteriori*).

Del Grande (1987) reconoce que, en determinadas tareas, las habilidades percepción de la posición en el espacio y percepción de las relaciones espaciales están estrechamente relacionadas. Por ejemplo, el autor indica que la percepción de las relaciones espaciales es la habilidad necesaria para reconocer si una figura es congruente con otra tras aplicarle una traslación, giro o volteo. Sin embargo, cuando focaliza su atención en identificar el movimiento que lleva de una figura a otra (para señalar qué movimientos transforman entre sí las letras b, p, q y d), la habilidad puesta en juego es la percepción de la posición en el espacio. Tras el análisis retrospectivo de las tareas propuestas en este trabajo, la posición relativa a la que hace alusión la descripción de la percepción de las relaciones espaciales queda descrita por relacionar dos objetos respecto a la dirección, la orientación, si son secantes, coincidentes, paralelos, perpendiculares o simétricos. En cambio, cuando el estudiante identifica qué giros, traslaciones o volteos describen el cambio de posición de un objeto, respecto a un instante inicial o respecto al punto de vista del observador, se considera que utiliza la percepción de la posición en el espacio. Cuando se hace referencia a estos movimientos para justificar la conservación de determinadas propiedades (longitud, número de caras, etc.) se considera que utiliza la conservación de la percepción. A partir de la información anterior, se elabora una tabla final de categorías correspondientes a cada una de las habilidades y generalizables a todas las tareas de las tres sesiones (tabla 3).

Tabla 3.
Categorías para registrar la manifestación de las habilidades de visualización

<i>Habilidad</i>	<i>Categorías para el análisis de las habilidades</i>
Percepción figura-contexto (FC)	FC1: Utilización del proceso de formación de una estructura a partir de una menor. FC2: Identificación de elementos (segmentos, vértices, lados, caras, ángulos) dentro de una estructura mayor.
Conservación de la percepción (CP)	CP1: Utilización de criterios de conservación de propiedades, haciendo referencia a la forma o al tamaño, a los movimientos (giros, traslaciones, volteos) o a las distintas perspectivas. CP2: Identificación de elementos ocultos (segmentos solapados, caras, vértices y lados que no se ven, etc.).
Percepción de la posición en el espacio (PE)	PE1: Utilización de elementos de posición respecto a un objeto fijo o al propio observador (sistema de referencia, coordenadas, atrás, adelante, arriba, cerca, etc.). PE2: Identificación de las variaciones de posición que han sufrido figuras congruentes mediante traslaciones, giros y volteos.
Percepción de las relaciones espaciales (RE)	RE1: Utilización de aspectos que expresan la posición relativa de dos objetos (dirección, orientación, paralelismo, secantes, coincidentes, perpendiculares, simétricos). RE2: Identificación de relaciones entre un desarrollo plano de un poliedro y las cualidades del poliedro.
Discriminación visual (DV)	DV1: Utilización de criterios de clasificación empleando semejanzas o diferencias. DV2: Identificación de semejanzas o diferencias entre dos objetos.

Mostramos un ejemplo de análisis de la detección y registro de las habilidades manifestadas en la actividad de la tercera sesión cuando dos estudiantes (E1 y E2) debaten con el investigador (I) sobre la posibilidad de encontrar polígonos regulares de cinco y siete lados al seccionar un cubo por un plano. En el análisis se observa que los estudiantes muestran las categorías FC2 y RE1 de manera adecuada.

- E1: Un pentágono regular no puede tener dos lados paralelos. [RE1]
 E2: Si estamos trabajando en un cubo, tiene que haber en un corte dos lados paralelos [FC2]. No puede haber un pentágono regular.
 I: Lo reunimos todo y obtenemos una argumentación. No puede haber un pentágono regular. ¿Entendéis? ¿Está claro? Unido con los dibujos que él ha hecho en los que sí parecía. Un paso más. ¿Se puede conseguir al cortar un cubo con un plano, un heptágono, un polígono de siete lados?
 E1: No.
 I: No, ¿por qué?
 E1: Porque para cada lado del polígono necesitamos que el plano que corte a una cara del cubo. Y, como el cubo solo tiene seis lados [caras],... [FC2].

Aunque un estudiante, en una misma actividad, ha podido poner en juego múltiples estrategias y procesos visuales, únicamente contabilizamos en nuestro estudio lo que ha manifestado expresamente en sus intervenciones tanto en las respuestas escritas como en sus participaciones orales. Se analizan todas ellas, contabilizando 272 intervenciones en la primera sesión, 432 en la segunda y 707 en la tercera.

A partir del análisis, se elabora una ficha de recogida de las habilidades manifestadas para cada intervención de cada estudiante, distinguiendo entre un uso correcto de la habilidad para la resolución de la tarea y un uso incompleto (uso de manera incorrecta o parcialmente correcta). Para poder esta-

blecer comparaciones entre la forma en que cada estudiante ha manifestado las habilidades durante las sesiones, se determina una expresión en porcentaje que normalice la cantidad de intervenciones que cada cual ha tenido en ellas. Para ello se obtiene el porcentaje de ocasiones en el que se ha manifestado cada habilidad respecto al número de intervenciones que se han registrado.

Por ejemplo, para la habilidad percepción de la figura-contexto, se define el indicador FCI (figura-contexto incompleto) de cada sesión como el porcentaje de manifestaciones incompletas de FC respecto del número total de intervenciones del estudiante en dicha sesión. Análogamente se calcula FCC (figura-contexto) de cada sesión como el porcentaje de manifestaciones correctas de dicha habilidad en esa sesión (tabla 4).

Tabla 4.
Ejemplo de cálculo de los indicadores FCI y FCC para un estudiante

	Intervenciones	Manifestaciones incompletas de FC	FCI (%)	Manifestaciones correctas de FC	FCC (%)
Sesión 1	22	3	13,6	8	36,4
Sesión 2	40	2	5,0	8	20,0
Sesión 3	42	1	2,38	5	11,9

Los indicadores FCI y FCC nos aportan información sobre el comportamiento del estudiante respecto a la habilidad figura-contexto, cuantificando tanto el uso que hace de ella como la corrección con la que la utiliza. En el ejemplo, en la sesión 1, el estudiante ha manifestado de manera incompleta la habilidad FC en el 13,6 % de las intervenciones que ha realizado, mientras que lo ha hecho de manera correcta en el 36,4 % de las intervenciones registradas. En el 50 % restante de las intervenciones, no aparece la habilidad FC, por no requerirla la tarea o por no haber evidencias de que la ha utilizado el estudiante. Un valor de 100 % en el indicador FCC implicaría que el estudiante ha manifestado correctamente la habilidad FC en todas las intervenciones que ha realizado. Se procede de manera análoga para los indicadores relativos a las otras habilidades. De esta forma, tenemos un registro cuantificado de las habilidades de visualización que se han observado en cada estudiante.

Esta cuantificación permite determinar indicadores tanto individuales como de grupo de la manifestación de las habilidades a lo largo de las tres sesiones, permitiendo estudiar relaciones cuantitativas. En este artículo nos centramos en describir los indicadores individuales relativos a las manifestaciones correctas e incompletas de cada habilidad y en relacionarlos con la visualización de los estudiantes, medida por las puntuaciones en los test visuales.

RESULTADOS

Para cada estudiante se dispone de indicadores de la manifestación de cada una de las cinco habilidades, cuando lo realizan correctamente o de manera incompleta, a lo largo de las tres sesiones (Ramírez, 2012). Esto origina un conjunto de treinta datos numéricos, con valores entre 0 y 1, que indican el porcentaje de uso de cada habilidad en las intervenciones de los estudiantes. A partir de estos resultados, se obtiene la manifestación de las habilidades registradas en el experimento de enseñanza (tabla 5), así como de las categorías para cada una de ellas tanto de manera incompleta como correcta (tabla 6).

Tabla 5.
 Manifestaciones de cada habilidad (porcentaje de estudiantes
 y porcentaje de manifestaciones incompletas y correctas) en las tres sesiones

	%	FCI	FCC	%	CPI	CPC	%	PEI	PEC	%	REI	REC	%	DVI	DVC
Ses. 1	100	10,7	34,6	100	2,6	16,2	100	0,7	11,8	63	2,4	2,6	79	1,8	5,3
Ses. 2	100	4,7	18,9	100	2,2	7,8	100	1,7	6,4	100	0,8	14,6	95	2,7	7,3
Ses. 3	100	2,5	7,4	62,5	0,1	1,8	100	1,7	11,3	100	4,1	17,4	91,6	1,5	4

Tabla 6.
 Total de manifestaciones de las categorías de manera incompleta y correcta en las tres sesiones

	FC1		FC2		CP1		CP2		PE1		PE2		RE1		RE2		DV1		DV2	
	I	C	I	C	I	C	I	C	I	C	I	C	I	C	I	C	I	C	I	C
Ses. 1	52	12	6	176	9	81	5	7	3	1	1	63	13	14	0	0	0	22	10	7
Ses. 2	21	65	20	98	18	66	1	1	13	41	2	14	7	124	0	2	8	17	15	46
Ses. 3	10	38	25	67	2	25	0	0	15	118	9	42	25	184	33	62	5	24	16	32

La habilidad percepción de la figura-contexto es manifestada por todos los estudiantes en las tres sesiones, siendo el porcentaje de manifestaciones correctas superior al de incompletas. El análisis de las categorías nos permite observar que las manifestaciones incompletas de la primera sesión corresponden mayoritariamente a FC1, al argumentar los estudiantes sobre los procesos de construcción a partir de estructuras menores. En la segunda sesión corresponden tanto a FC1 como a FC2, y en la tercera se asocian principalmente a FC2, cuando distinguen elementos de una estructura mayor. En las manifestaciones correctas, son mayoritarias las de FC2 en las tres sesiones.

En las sesiones 1 y 2, todos los estudiantes ponen en juego la habilidad de conservar la percepción, mientras que en la sesión 3 lo hace el 62,5 %. La cantidad de manifestaciones correctas es superior a la de incompletas en todas las sesiones y se relacionan con la categoría CP1, en la que los estudiantes utilizan criterios de igualdad haciendo referencia a la forma, tamaño, movimientos o perspectivas. La categoría CP2, asociada a identificar elementos ocultos, aparece en pocas intervenciones.

Todos los sujetos manifiestan en todas las sesiones la habilidad percepción de la posición en el espacio, siendo las respuestas correctas superiores a las incompletas. Las manifestaciones incompletas van asociadas a PE1 cuando se refieren a elementos de posición respecto a los objetos o a ellos mismos. No obstante, en la primera sesión, las manifestaciones correctas se asocian mayoritariamente a PE2 al identificar movimientos entre dos figuras.

En cuanto a la habilidad de percepción de las relaciones espaciales, las manifestaciones correctas son superiores a las incompletas en todas las sesiones. En las sesiones 2 y 3 todos los estudiantes ponen en juego esta habilidad, mientras que en la sesión 1 lo hacen el 63 %. En las dos primeras sesiones tanto las manifestaciones correctas como las incompletas corresponden a la categoría RE1, al utilizar los estudiantes elementos de posición relativa entre objetos (dirección, paralelismo, perpendicularidad, etc.). En la sesión 3 aparece un mayor número de manifestaciones incompletas asociadas a RE2, al identificar elementos en los desarrollos planos.

En la segunda sesión aparece el mayor porcentaje de estudiantes que manifiestan la habilidad de discriminación visual (95 %), siendo las respuestas correctas superiores a las incompletas en todas las sesiones. Las manifestaciones incompletas corresponden mayoritariamente a DV2, buscando semejanzas o diferencias entre las figuras. Las completas también corresponden principalmente a esta categoría, salvo en la primera sesión, donde provienen de utilizar criterios de clasificación mediante semejanzas.

Para los test PMA y DAT se dispone de un vector de dos coordenadas correspondientes a las puntuaciones normalizadas considerando los valores de media y desviación típica incluidos en los correspondientes baremos de los cuestionarios.

Para establecer las posibles relaciones entre las diferentes variables del estudio se han efectuado análisis de correlación de Pearson entre, por un lado, las habilidades (correctas e incompletas) y, por el otro, las puntuaciones obtenidas en los test (PMA y DAT-5) de forma diferenciada en cada una de las sesiones. La tabla 7 muestra los resultados de las correlaciones que resultaron significativas al nivel 0,05 bilateral ($p \leq 0,05$). Los análisis se realizaron mediante el paquete estadístico SPSS 17.0.

Tabla 7.
Correlación entre los test visuales y las habilidades manifestadas en las tres sesiones

	PMA	DAT
Sesión 1	Correlaciones no significativas	Correlaciones no significativas
Sesión 2	REI ($R = ,518$; $p = ,008$) DVI ($R = ,573$; $p = ,003$)	FCC ($R = ,471$; $p = ,017$) FCI ($R = -,628$; $p = ,001$) PEC ($R = -,459$; $p = ,021$)
Sesión 3	PEC ($R = -,411$; $p = ,041$)	Correlaciones no significativas

Se observa que ninguno de los test correlaciona con un mismo indicador en dos sesiones distintas, por lo que podemos decir que no existe una clara relación significativa entre las puntuaciones en los test y la manifestación de las habilidades de visualización a lo largo del experimento de enseñanza. El hecho de que incluso haya correlaciones negativas en algunos casos con las manifestaciones correctas refuerza la arbitrariedad de la correlación, independientemente de que haya coincidencia entre los test y las habilidades que aparecen en la tabla.

Es destacable la ausencia de correlación estable a lo largo de las sesiones entre el test PMA y las habilidades percepción de la posición en el espacio y discriminación visual. Específicamente, las categorías PE2 y DV2 describen habilidades necesarias para dar respuesta al ítem, identificando movimientos entre la muestra y las figuras dadas como opciones o identificando semejanzas. También podrían manifestarse categorías como FC2 al identificar elementos dentro de la figura o establecer relaciones espaciales entre estos elementos (RE1).

Igualmente, para el test DAT, la categoría RE2 estaría estrechamente relacionada con la habilidad necesaria para dar respuesta al ítem, identificando relaciones entre el poliedro y su desarrollo plano. Sin embargo, la habilidad de percepción de las relaciones espaciales no presenta ninguna correlación significativa con el test. Otras categorías asociadas a este test podrían ser PE2, al identificar giros entre dos poliedros construidos a partir del mismo desarrollo plano, CP2, al identificar caras que no se ven, FC2, al identificar caras concretas, o DV2, al identificar semejanzas entre la muestra y las opciones.

DISCUSIÓN

La existencia de diferentes criterios para diagnosticar la visualización de los estudiantes puede explicar que los resultados sean aparentemente contradictorios al estudiar la relación entre talento matemático y visualización, tal como son señalados en las revisiones de varios autores (Bishop, 1980; Lean y Clements, 1981). En este estudio hemos evaluado la visualización de estudiantes con talento matemático a partir tanto de los resultados obtenidos en dos test visuales como de las habilidades de visualización puestas en juego en tres sesiones de enriquecimiento curricular. Mediante un análisis estadístico de correlaciones entre las puntuaciones de los test visuales y los indicadores utilizados para las manifes-

taciones de las habilidades en la resolución de tareas geométricas, hemos detectado la falta de una relación significativa entre la visualización que detectan los test y el uso que han manifestado en las tareas propuestas.

Tanto de la información obtenida a partir de los test como de la recogida en la resolución de tareas, se puede concluir que los estudiantes con talento matemático estudiados han puesto en juego su visualización. Estos sujetos manifestaron mayoritariamente sus habilidades de visualización en las tareas propuestas y presentaron una puntuación superior en los test visuales respecto a la media estandarizada y contrastada con un grupo de estudiantes control (Ramírez-Uclés, Ramírez-Uclés, Flores y Castro, 2013).

En cuanto a la controversia planteada sobre el papel que desempeña la visualización en el talento matemático, consideramos que la falta de relación significativa entre los instrumentos de medida utilizados pone de manifiesto que es importante matizar qué aspecto de la visualización y del talento es el que se considera en cada investigación.

Los test proporcionan un dato transversal, estandarizado y descontextualizado que aporta una fotografía instantánea de un determinado aspecto visualizador. En cambio, el registro de la visualización manifestada en la resolución de tareas geométricas implica un proceso más complejo, tanto por la mayor actividad cognitiva requerida (Arcavi, 2003; Rivera, 2011) como por la necesidad de coordinación de diversos procesos cognitivos de visualización y razonamiento (Torregrosa, Quesada y Penalva, 2010; Prior y Torregrosa, 2013).

Por ejemplo, es destacable que en la sesión 1 no exista correlación significativa entre la puntuación del test PMA y ninguna de las habilidades, ni de manera correcta ni incompleta, pese a que varias de las tareas de esta sesión eran muy similares a los ítems del test, ya que tres de las tareas consistían en reconocer qué estructuras podían obtenerse a partir de giros de una dada. En el test PMA, el sujeto debe determinar qué figuras pueden obtenerse mediante giros a partir de la inicial, no siendo válidas las que resultan simétricas (figura 2).

En cambio, en la resolución de la tarea de determinar el número de estructuras diferentes que pueden construirse con dos fichas (figura 5), los estudiantes necesitan un proceso sistemático de construcción en el que van discriminando aquellas estructuras que pueden obtenerse mediante giros y/o simetrías. Si bien para reconocer las estructuras que se obtienen a partir de giros, se ponen en juego habilidades similares a las utilizadas en el test PMA, para determinar todas las posibles estructuras se requiere un razonamiento visual más complejo o una estrategia matemática que les permita ser exhaustivos, como puede ser la construcción de todas las posibles conexiones de dos fichas no alineadas (figura 6) y discriminar las que son diferentes reconociendo giros y simetrías entre ellas.

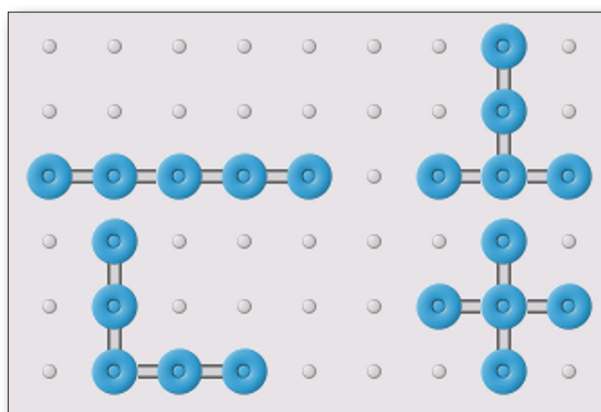


Fig. 5. Estructuras diferentes formadas a partir de dos fichas.

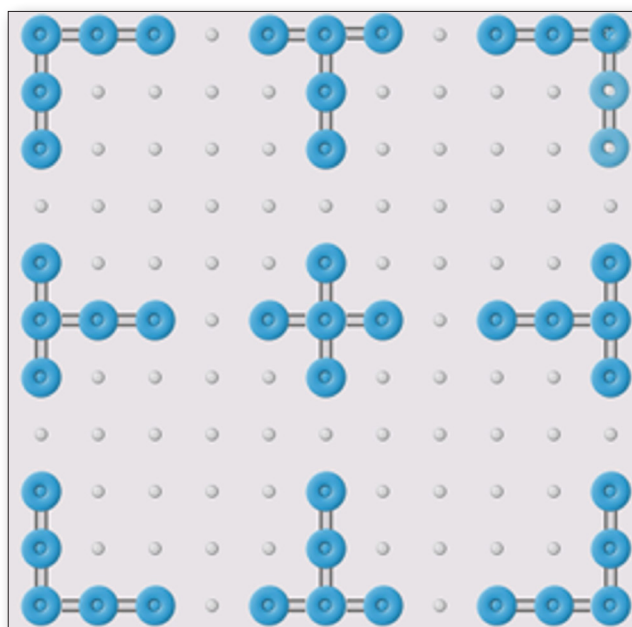


Fig. 6. Combinaciones posibles de dos fichas no alineadas.

Análogamente, en la sesión 3, varias tareas consistían en estudiar propiedades de objetos tridimensionales a partir de sus desarrollos planos, lo que implica que los estudiantes pusiesen en juego habilidades necesarias en el test DAT (figura 1). Por ejemplo, se les presentaban diferentes hexaminós y se les pedía indicar razonadamente cuáles determinaban un cubo y qué puntos del desarrollo plano coincidían en algún vértice del cubo.

Las tareas planteadas en el curso implican un mayor factor de dificultad que se añade a las habilidades detectadas en los test, ya que demandan razonamiento visual o emplear estrategias matemáticas de resolución. Por ejemplo, un estudiante que obtiene puntuación alta en el test PMA, es esperable que reconozca las estructuras diferentes en la figura 6, manifestando correctamente las correspondientes habilidades en esta tarea, independientemente de que no haya sido exhaustivo para considerar todos los casos, puesto que el registro de las habilidades iba asociado a los procesos llevados a cabo, no al rendimiento. Dado que el talento matemático implica prestar atención a los detalles y desarrollar estrategias eficientes, es de esperar que los estudiantes de talento fueran exhaustivos en la consideración de todos los casos. Por consiguiente, la adecuada combinación de habilidades y de características del talento implicaría una resolución eficiente en esta tarea.

El uso de la visualización en la resolución de una tarea viene condicionado por diversos factores, como pueden ser la contextualización del proceso de enseñanza (Presmeg, 1986), el formato de presentación de la tarea (Marmolejo y González, 2015), la forma de abordarla (Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández, 2012) o las estrategias de resolución utilizadas por los estudiantes (Guinjoan, Gutiérrez y Fortuny, 2015). En nuestro trabajo, las tareas propuestas han implicado que los estudiantes con talento matemático manifiesten distintas combinaciones de las habilidades de visualización y diversos procesos de razonamiento visual.

Desde una perspectiva educativa, consideramos que el estudio de las habilidades de visualización en la resolución de tareas matemáticas puede aportar más información que la que suministran los test de una manera puntual. La medición de la visualización de manera procesual, en un contexto de enseñanza, facilita que las tareas adquieran más significado –frente a los ítems de los test, que plantean cuestiones sin contexto ni problema asociado–, estimula el aprendizaje colectivo, que ayuda a apreciar

respuestas con mayor riqueza visual –frente a los test, que se resuelven de manera individual, sin confrontación–, con lo que el trabajo en las clases de matemáticas favorece el ejercicio de las habilidades, y por tanto su mejora.

En relación con cada una de las habilidades, destacamos que la manifestación de las habilidades está estrechamente condicionada por la demanda de la tarea. Mediante las categorías de análisis hemos podido identificar manifestaciones de las habilidades en cada actividad. La percepción de la figura-contexto es la habilidad más manifestada durante el experimento de enseñanza, puesta de manifiesto principalmente mediante el reconocimiento de elementos dentro de una estructura mayor. La conservación de la percepción es la habilidad de la que menos manifestaciones incompletas se han registrado, haciendo uso de ella principalmente al utilizar criterios de igualdad aludiendo a la forma, tamaño, movimientos o perspectivas. Las manifestaciones de la percepción de la posición en el espacio van asociadas mayoritariamente a indicar elementos de posición del objeto respecto a otro objeto o a ellos mismos, aludiendo a los movimientos en las tareas que lo requieren. La mayoría de los registros de la percepción de las relaciones espaciales se deben a la utilización de elementos de posición relativa, como perpendicularidad y paralelismo. Finalmente, la discriminación visual es la habilidad de la que menos manifestaciones correctas se han registrado y se han derivado mayoritariamente del reconocimiento de semejanzas y diferencias entre figuras (Ramírez, 2012).

No obstante, la complejidad para registrar todos los aspectos visualizadores puestos en juego en la resolución de tareas supone una limitación para comprender el papel que la visualización desempeña en la caracterización del talento matemático. Para futuras investigaciones, consideramos necesario profundizar tanto en el proceso de operativización para detectar las habilidades de visualización como en la determinación de los factores que condicionan su uso, especialmente con la perspectiva de diseñar metodologías de enseñanza que favorezcan un mejor uso de la visualización.

AGRADECIMIENTOS

La investigación presentada es parte de las actividades de los proyectos de investigación Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas (EDU2012-37259, MINECO), Modelos de enseñanza y procesos de aprendizaje de las matemáticas: análisis multidimensional (EDU2015-69731-R, MINECO/FEDER) y Competencia didáctica del profesor y aprendizaje de conceptos matemáticos escolares (EDU2015-70565-P, MINECO/FEDER).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARCAVI, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241.
<https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- BEN-CHAIM, D. y LAPPAN, G. (1989). The Role of Visualization in the middle school mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 49-60.
- BENNETT, G. K., SEASHORE, H. G. y WESMAN, A. G. (2000). *Test de Aptitudes Diferenciales (DAT-5). Manual*. Madrid: TEA Ediciones.
- BISHOP, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education: a review. *Educational Studies in Mathematics*, 11(3), 257-269.
<https://doi.org/10.1007/BF00697739>

- CLEMENTS, D. H. y BATTISTA, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). Nueva York: MacMillan.
- DAVIS, G. A., RIMM, S. B. y SIEGLE, D. (2011). *Education of the gifted and talented* (6.ª ed.). Boston, MA: Pearson.
- DEL GRANDE, J. J. (1987). Spatial Perception and Primary Geometry. En M. M. Lindquist (Ed.), *Learning and Teaching Geometry, K-12* (pp. 127-135). Reston, VA: NCTM.
- DEL GRANDE, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.
- DÍAZ, O., SÁNCHEZ, T., POMAR, C. y FERNÁNDEZ, M. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. *FAISCA, Revista de Altas Capacidades*, 13(15), 30-39.
- FREIMAN, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: a challenging situations approach. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3(1), 51-75.
- GODINO, J., GONZATO, M., CAJARAVILLE, J. y FERNÁNDEZ, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(2), 109-130.
- GREENES, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher*, 28(8), 14-17.
- GUILLÉN, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 21-68). Lleida: SEIEM.
- GUINJOAN F., M., GUTIÉRREZ, Á. y FORTUNY, J. M. (2015). Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Canguro. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1), 29-46.
- GUTIÉRREZ, A. (1992). Procesos y habilidades en visualización espacial. En A. Gutiérrez (Ed.), *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Geometría* (pp. 44-59). México: CINVESTAV-PNFAPM.
- (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 3-19). Valencia: PME.
- (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruíz y M. de la Fuente, M. (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Badajoz: Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM Thales.
- HADAMARD, J. (1947). *Psicología de la invención en el campo matemático*. Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina, S.A.
- HERSHKOWITZ, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Neshet y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge, G.B.: Cambridge U.P.
<https://doi.org/10.1017/cbo9781139013499.006>
- HÖFFLER, T. N. (2010). Spatial ability: its influence on learning with visualizations —a meta-analytic review. *Educational Psychological Review*, 22, 245-269.
<https://doi.org/10.1007/s10648-010-9126-7>
- JIMÉNEZ, W., ROJAS, S. y MORA, L. (2011). *Características del talento matemático asociadas a la visualización*. Comunicación presentada en XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. Disponible en línea: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1175/234> (consulta 8/7/2016).
- JOHNSON, S. K. (2004). Definitions, models, and characteristics of gifted students. *Identifying gifted students: A practical guide*. Waco, TX: Prufrock Press.
- KAUFMAN, S. B. y STERNBERG, R. J. (2010). Conceptions of giftedness. En S. Pfeiffer (Ed.), *Handbook of giftedness in children: Psycho-educational theory, research and best practices* (pp. 71-91). Nueva York: Springer.

- KRIPPENDORFF, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.
- KRUTETSKII, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- LEAN, G. y CLEMENTS, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 267-299.
<https://doi.org/10.1007/BF00311060>
- LEE K., KIM M., NA, G., HAN, D. y SONG, S. (2007). Induction, analogy, an imagery in geometric reasoning. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 145-152). Seul, Corea: PME.
- MARMOLEJO, G. y GONZÁLEZ, M. T. (2015). Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 18(3), 301-328.
<https://doi.org/10.12802/relime.13.1831>
- MILLER, R. C. (1990). *Discovering mathematical talent*. ERIC Digest E482. Washington, D.C.: Office of Educational Research and Improvement.
- MÖNKS, F. y MASON, E. (2002). Development psychology and giftedness: Theories and research. En K. Heller, F. J. Mönks, R. J. Sternberg y R. F. Subotnik (Eds.), *International handbook of giftedness and talent* (2.ª ed., pp. 141-155). Amsterdam: Elsevier.
- PASSOW, A. (1993). National/State policies regarding education of the gifted. En K. Sélér, F. Mönks y A. Passow (Eds.), *International handbook of research and development of giftedness and talent* (pp. 29-46). Oxford: Pergamon Press.
- PRESMEG, N. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 297-311.
<https://doi.org/10.1007/BF00305075>
- PRESMEG, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205-235). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- PRIOR, J. y TORREGROSA, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 16(3), 339-368.
<https://doi.org/10.12802/relime.13.1633>
- RABAB'H, B. y VELOO, A. (2015). Spatial visualization as mediating between mathematics learning strategy and mathematics achievement among 8th grade students. *International Education Studies*, 8(5), 1-11.
<https://doi.org/10.5539/ies.v8n5p1>
- RAMÍREZ, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral no publicada). Granada: Universidad de Granada. Disponible en línea: <http://fqm193.ugr.es/produccioncientifica/tesis/ver_detalle/7461/descargar>.
- RAMIREZ-UCLÉS, R., RAMIREZ-UCLÉS, I., FLORES, P. y CASTRO, E. (2013). Análisis de las capacidades de visualización espacial e intelectual en los alumnos con talento matemático. *Revista Mexicana de Psicología*, 30(1), 24-31.
- RIVERA, F. D. (2011). *Towards a visually-oriented school mathematics curriculum*. Nueva York: Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-94-007-0014-7>

- RYU, H., CHONG, Y. y SONG, S. (2007). Mathematically gifted students' spatial visualization ability of solid figures. En J. H. Wo., H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 137-144). Seoul, Corea: PME.
- TANNENBAUM, A. J. (2003). Nature and nurture of giftedness. In N. Colangelo y G. A. Davis (Eds.), *Handbook of gifted education* (3.^a ed., pp. 45-59). Boston: Allyn and Bacon.
- THURSTONE, L. L. y THURSTONE, T. G. (1976). *PMA: Aptitudes Mentales Primarias*. Madrid: TEA.
- TORREGROSA, G., QUESADA, H. y PENALVA, M. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(2), 327-340.
- UTTAL, D. H., MEADOW, N. G., TIPTON, E. HAND, L.L., ALDEN, A. R., WARREN, C. y NEWCOMBE, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: a meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139(2), 352-402.
<https://doi.org/10.1037/a0028446>
- VAN GARDEREN, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities*, 39(6), 496-506.
<https://doi.org/10.1177/00222194060390060201>
- WAI, J., LUBINSKI, D. y BENBOW, C. P. (2009). Spatial ability for stem domains: Aligning over 50 years or cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal or Educational Psychology*, 101(4), 817-835.
<https://doi.org/10.1037/a0016127>

Visualization abilities of mathematically gifted students: a comparison between the results from psychometric tests and the visualization abilities used for geometrical tasks

Rafael Ramírez Uclés, Pablo Flores Martínez
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
Facultad de Ciencias de la Educación. Campus Universitario de la Cartuja.
rramirez@ugr.es, pflores@ugr.es

Based on a review of the research done in the field, it was observed that there is no single opinion about the relationship between mathematical talent and visualization. One factor to be considered is the variety of instruments used to characterize visualization. The objective of this article is to compare the visualization of students with mathematical talent, measured using psychometric tools, applied to the manifestations of visualization skills used in three sessions of curricular enrichment.

The subjects are 25 students (20 boys and 5 girls) from the second year of the ESTALMAT program, which is a project for the detection and stimulation of early talent in mathematics. The age range is 13 to 16 years, with an average of 14.5 years.

To record the visualization using psychometric tools, two tests used in research, related to the visualization of students with mathematical talent, were selected: Spatial Relations Factor (SR) of the Battery of Differentiated Aptitudes (DAT-5) and Spatial Factor (E) of the Primary Skills Test (PMA).

In order to record the visualization occurring in the curriculum enrichment sessions, the presence of the five visualization abilities in the students' problem resolutions is observed: Figure-context perception, Perception Conservation, Perception of position in space, Perception of Spatial Relationships and Visual Discrimination.

The data collection is carried out in three sessions of the curriculum enrichment of the ESTALMAT project, with a duration of three hours each. Sessions are dedicated to the resolution of geometric problems that present different qualities: mathematical concepts and visualization appear in a functional way, dealing with contents that students have not encountered in the curriculum and thoroughly promoting the application and development of visualization skills. In the first session, the mathematical content is movements in the plane, which are used as tools to solve problems. The second session focuses on problems of space filling, for which they have to recognize the properties of the polyhedra. Finally, in the third, analogies and differences in tasks in the plane or in space are studied, such as studying the properties of a polyhedron from its plane development.

For each student there are indicators of the presence of each of the five abilities, when they are performed correctly or incompletely, during the three sessions. By means of a statistical correlation analysis between the scores of the visual tests and the indicators used for the presence of the abilities in the resolution of the geometric tasks, a lack of a significant relation was detected between the visualization that each test detects and the use of the abilities in the proposed tasks.

The tests provide cross-sectional, standardized and decontextualised data that provides an instant snapshot of a certain visualization aspect. On the other hand, the recording of the visualization used in the resolution of geometric tasks implies a more complex process, both for the greater cognitive activity and for the need to coordinate different visualization and reasoning cognitive processes.